

Дж. Милнор

*Теорема
об h -кобордизме*



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«М И Р»

PRINCETON MATHEMATICAL NOTES

LECTURES ON THE
h-COBORDISM THEOREM

by
JOHN MILNOR

Notes by
L. Siebenmann
J. Sondow

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS

1965

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

Дж. МИЛНОР

Теорема об h -кобордизме

Перевод с английского

Э. Г. БЕЛАГИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1969

Новая книга Дж. Милнора, известного американского математика, уже знакомого советскому читателю по переводу его работы «Теория Морса», содержит изложение известной теоремы С. Смейла об h -кобордизме и ее приложения к важным задачам дифференциальной топологии. Книга написана ясным, доступным языком и может служить прекрасным введением в теорию кобордизмов и до некоторой степени в общую дифференциальную топологию. Поэтому настоящая монография представляет интерес не только для топологов, но и для математиков других специальностей. Она будет полезна студентам старших курсов, аспирантам и преподавателям университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В 1935 году М. Морс заметил, что числа критических точек различных индексов гладкой функции на многообразии могут быть использованы для изучения геометрических свойств этого многообразия. Например, если на замкнутом многообразии M существует гладкая функция, имеющая всего две критические точки: максимум и минимум, то это многообразие гомеоморфно сфере; если M — многообразие с краем, край которого dM есть объединение двух открытых непересекающихся подмножеств N_1 и N_2 , и если на M задана гладкая функция, принимающая значения между 0 и 1, равная 0 на N_1 и 1 на N_2 и не имеющая критических точек, то N_1 диффеоморфно N_2 и M диффеоморфно $N_1 \times [0, 1]$.

Морсом были доказаны неравенства, связывающие числа критических точек с рангами и порядком кручения групп гомологий многообразия.

Более чем двадцать лет спустя С. Смейл установил, что на любом односвязном многообразии M достаточно высокой размерности существует гладкая функция с минимальным числом критических точек, не противоречащим неравенствам Морса. Среди большого числа следствий из этого результата Смейла отметим обобщенную гипотезу Пуанкаре в размерностях, больших или равных 5 (n -мерное гладкое односвязное многообразие, гомотопически эквивалентное n -мерной сфере, гомеоморфно n -мерной сфере), и теорему об h -кобордизме (односвязные h -кобордантные многообразия размерности, большей или равной 5, диффеоморфны; многообразия N_1 и N_2 называются h -кобордантными, если существует многообразие M , такое,

что $dM = N_1 \cup N_2$ и N_1 и N_2 являются деформационными ретрактами многообразия M).

Этот результат Смейла был как нельзя более своевременным. В конце 50-х годов Дм. Милнор открыл, что на сфере размерности 7 (и больше) существуют различные гладкие структуры. Вскоре им была произведена классификация, но не многообразий, гомеоморфных сфере с точностью до диффеоморфизма, а многообразий, гомотопически эквивалентных сфере с точностью до h -кобордизма. Теорема Смейла позволила, таким образом, получить из работы Милнора классификацию всех гладких структур на сферах.

К этому следует добавить, что в большинстве других случаев при доказательстве диффеоморфности многообразий существенно используется теорема Смейла об h -кобордизме.

Настоящие лекции посвящены изложению доказательства этой важной теоремы, а также некоторых ее приложений.

Автор лекций — американский математик Джон Милнор — хорошо известен в Советском Союзе не только своими выдающимися работами по топологии. Широкую известность у нас получила его книга «Теория Морса», выпущенная издательством «Мир» в 1965 году, и ряд статей, переведенных в сборнике «Математика». Мы надеемся, что и эти лекции будут с интересом встречены широким кругом читателей.

Д. Б. Фукс

§ 0. ВВЕДЕНИЕ

В этой книге представлены записи лекций Джона Милнора, прочитанные им в октябре и ноябре 1963 г. на семинаре по дифференциальной топологии в Принстонском университете.

Пусть W — компактное гладкое многообразие с краем, состоящим из двух компонент V и V' , так что V и V' являются деформационными ретрактами W . Тогда W называют *h -кобордизмом* между V и V' . Теорема об h -кобордизме утверждает, что если к тому же V (а значит) и V' односвязны и размерности выше 4, то W диффеоморфно $V \times [0, 1]$ и (следовательно) V диффеоморфно V' . Доказательство принадлежит Стефену Смейлу [26]. Эта теорема имеет многочисленные важные приложения — включая доказательство обобщенной гипотезы Пуанкаре для размерностей > 4 ; некоторые из этих приложений рассмотрены в § 9. Однако наша основная задача — изложить главные этапы доказательства упомянутой теоремы.

Вот очень приблизительный набросок доказательства. Мы начинаем с построения функции Морса для W (§ 2.1), т. е. гладкой функции $f: W \rightarrow [0, 1]$, имеющей конечное число невырожденных критических точек, внутренних для W , и такой, что $V = f^{-1}(0)$, $V' = f^{-1}(1)$. Доказательство основано на том факте (3.4), что W диффеоморфно $V \times [0, 1]$ тогда (и только тогда), когда W обладает функцией Морса описанного выше типа без критических точек. Ввиду этого в §§ 4—8 мы показываем, что в предположениях теоремы возможно так изменить данную функцию Морса f , чтобы в конце концов устранить все критические точки. В § 4 функция f перестроена таким образом, чтобы уровень $f(p)$ критической точки p был возрастающей функцией индекса этой точки. В § 5 сформулиро-

ваны геометрические условия, при которых две критические точки p, q индекса λ и $\lambda+1$ могут быть устранены или «взаимно уничтожены». В § 6 геометрические условия § 5 заменены более алгебраическими условиями — формулируется условие односвязности. В § 9 результаты § 5 позволяют нам устранить все критические точки индекса 0 или n , а затем заменить критические точки индекса 1 и $n-1$ равным числом критических точек индекса 3 и $n-3$ соответственно. В § 7 показано, что критические точки одного и того же индекса λ для всех $2 \leq \lambda \leq n-2$ допускают перегруппировку (7.6) таким образом, что все полученные критические точки могут быть попарно «взаимно уничтожены» повторным применением результата § 6. На этом доказательство заканчивается.

Необходимо сделать два замечания. В § 5 наши доводы в большей степени вдохновлены последними идеями М. Морса [17], [37], которые включают в себя альтернирование градиентно-подобного векторного поля для f , нежели оригинальным доказательством Смейла, которое использует его «ручки».

Мы действительно нигде в этих заметках явно не упоминаем о ручках. В § 6 включены улучшения, появившиеся в заметке Денниса Бардена [1], а именно: доказательство теоремы 6.4 для случая $\lambda=2$ на стр. 70—71 и утверждение теоремы 6.6 для случая $r=2$.

Теорема об h -кобордизме может быть обобщена в нескольких направлениях. Пока никто не преуспел в снятии ограничения на размерность V и V' : $\dim V$ ($\dim V' > 4$) (см. стр. 108). Если мы опустим требование односвязности V (а значит) и V' , то теорема перестанет быть справедливой (см. Милнор [13]). Но она останется верной, если мы одновременно потребуем, чтобы включение V (или V') в W было простой гомотопической эквивалентностью в смысле Дж. Г. К. Уайтхеда. Это обобщение, называемое теоремой об s -кобордизме, доказано Мазуром [6], Барденом [1] и Столлингсом. По поводу этого и других обобщений отсылаем к работе Уолла [33]. Отметим, наконец, что аналоги теорем об h - и s -кобордизме справедливы и для кусочно линейных многообразий.

§ 1. КАТЕГОРИЯ КОБОРДИЗМОВ

Вначале несколько знакомых определений. Евклидово пространство будет обозначаться через $R^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in R, i=1, \dots, n\}$, где R — действительная прямая, а евклидово полупространство — через $R_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid x_n \geq 0\}$.

Определение 1.1. Пусть V — подмножество R^n ; отображение $f: V \rightarrow R^m$ называется *гладким* или *бесконечно дифференцируемым*, если f может быть расширено до отображения $g: U \rightarrow R^m$, где $U \supset V$ — открыто в R^n и g имеет непрерывные частные производные всех порядков.

Определение 1.2. *Гладкое n -мерное многообразие* есть топологическое многообразие W со счетной базой и *гладкой структурой* \mathcal{S} на W . Структура \mathcal{S} есть совокупность пар (U, h) , удовлетворяющих четырем условиям.

1) Пара $(U, h) \in \mathcal{S}$ состоит из открытого множества $U \subset W$ (называемого *координатной окрестностью*) и гомеоморфизма h , отображающего U на открытое подмножество R^n или R_+^n .

2) Координатные окрестности U из \mathcal{S} покрывают все W .

3) Если (U_1, h_1) и (U_2, h_2) принадлежат \mathcal{S} , то отображение

$$h_1 h_2^{-1}: h_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow R^n \text{ или } R_+^n$$

гладкое.

4) Совокупность \mathcal{S} является максимальной относительно свойства (3), т. е. если любую пару (U, h) , не принадлежащую \mathcal{S} , присоединить к \mathcal{S} , то свойство (3) нарушится.

Край (граница) многообразия W , обозначаемый через dW , есть совокупность всех точек из W , которые не имеют окрестностей, гомеоморфных области R^n (см. Манкрес [8]).

Определение 1.3. $(W; V_0, V_1)$ есть *триада гладких многообразий*, если W — гладкое компактное n -мерное многообразие и dW — несвязное объединение двух открытых и замкнутых подмногообразий V_0 и V_1 .

Пусть $(W; V_0, V_1)$, $(W'; V'_1, V'_2)$ — две триады гладких многообразий и $h: V_1 \rightarrow V'_1$ — диффеоморфизм (т. е. такой гомеоморфизм, что h и h^{-1} гладкие); тогда можно образовать третью триаду $(W \cup_h W'; V_0, V'_2)$, где $W \cup_h W'$ есть пространство, образованное из W и W' h -отождествлением точек V_1 и V'_1 согласно следующей теореме:

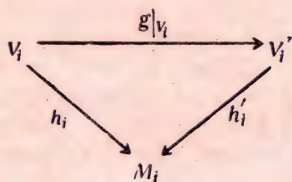
Теорема 1.4. На $W \cup_h W'$ существует гладкая структура \mathcal{S} , согласованная с данными структурами (т. е. такая, что оба отображения вложения $W \rightarrow W \cup_h W'$, $W' \rightarrow W \cup_h W'$ являются диффеоморфизмами на их образ).

Структура \mathcal{S} — единственная с точностью до диффеоморфизма, тождественного на V_0 , $h(V_1) = V'_1$ и V'_2 .

Доказательство будет дано в § 3.

Определение 1.5. Пусть M_0 и M_1 — два замкнутых гладких n -мерных многообразия (т. е. M_0, M_1 компактны, $dM_0 = dM_1 = \emptyset$); кобордизмом M_0 в M_1 называется пентада $(W; V_0, V_1; h_0, h_1)$, где $(W; V_0, V_1)$ — триада гладких многообразий и $h_i: V_i \rightarrow M_i$ — диффеоморфизм, $i=0, 1$. Два кобордизма $(W; V_0, V_1; h_0, h_1)$ и $(W'; V'_0, V'_1; h'_0, h'_1)$ из M_0 в M_1 эквивалентны, если существует диффеоморфизм $g: W \rightarrow W'$, отображающий V_0 в V'_0 , V_1 в V'_1 и такой, что следующая

диаграмма коммутативна для $i=0, 1$:



Итак, мы имеем категорию (см. Стинрод и Эйленберг [28]), объектами которой являются замкнутые многообразия, а морфизмами — классы эквивалентности с кобордизмов. Это означает, что кобордизмы удовлетворяют следующим двум условиям, вытекающим из 1.4 и 3.5 соответственно:

1) если заданы классы эквивалентности кобордизмов c из M_0 в M_1 и c' из M_1 в M_2 , то существует естественно определенный класс cc' из M_0 в M_2 ; эта операция композиции является ассоциативной;

2) для всякого замкнутого многообразия M существует единичный класс кобордизмов ι_M , а именно класс эквивалентности кобордизма

$$(M \times I; M \times 0, M \times 1; p_0, p_1), \quad p_i(x, i) = x, \quad x \in M, \quad i = 0, 1.$$

Поэтому для любого класса кобордизмов c из M_1 в M_2

$$\iota_{M_1} c = c = c \iota_{M_2}.$$

Отметим, что равенство $cc' = \iota_M$ не влечет за собой $c'c = \iota_M$. Пример:



Рис. 1.1. Кобордизм c заштрихован; кобордизм c' не заштрихован.

Здесь c имеет правый обратный c' , но не имеет левого обратного. Заметьте, что многообразия кобордизма не предполагаются связными.

Рассмотрим классы кобордизмов фиксированного многообразия M в себя. Они образуют моноид H_M , т. е. множество с ассоциативной операцией композиции и единицей. Обратимые кобордизмы в H_M образуют группу G_M . Мы сможем построить ряд элементов G_M , взяв в нижеследующих конструкциях $M=M'$.

Для произвольного диффеоморфизма $h: M \rightarrow M'$ определим класс c_h кобордизма $(M \times I, M \times 0, M \times 1; j, h_1)$, где $j(x, 0) = x$ и $h_1(x, 1) = h(x)$, $x \in M$.

Теорема 1.6. Для любых двух диффеоморфизмов $h: M \rightarrow M'$ и $h': M' \rightarrow M''$

$$c_h c_{h'} = c_{h'h}.$$

Доказательство. Пусть $W = (M \times I) \cup_h (M' \times I)$, и пусть $j_h: M \times I \rightarrow W$, $j_{h'}: M' \times I \rightarrow W$ суть вложения в определении $c_h c_{h'}$. Определим $g: M \times I \rightarrow W$ следующим образом:

$$g(x, t) = j_h(x, 2t), \quad 0 \leq t \leq 1/2,$$

$$g(x, t) = j_{h'}(h(x), 2t - 1), \quad 1/2 \leq t \leq 1.$$

Таким образом, g определено корректно и устанавливает требуемую эквивалентность.

Определение 1.7. Два диффеоморфизма $h_0, h_1: M \rightarrow M'$ (гладко) *изотопны*, если существует отображение $f: M \times I \rightarrow M'$, такое, что

1) f гладкое,

2) f_t , определенное равенством $f_t(x) = f(x, t)$ для каждого $t \in I$, есть диффеоморфизм,

3) $f_0 = h_0$, $f_1 = h_1$.

Два диффеоморфизма $h_0, h_1: M \rightarrow M'$ *псевдоизотопны*¹⁾, если существует диффеоморфизм $g: M \times I \rightarrow M' \times I$, такой, что $g(x, 0) = (h_0(x), 0)$, $g(x, 1) = (h_1(x), 1)$.

Лемма 1.8. Изотопия и псевдоизотопия являются отношениями эквивалентности.

¹⁾ В терминологии Манкреса h_0 « I -кобордантно» h_1 (см. [8]). В терминологии Хирша h_0 «конкордантно» h_1 .

Доказательство. Симметрия и рефлексивность очевидны. Для того чтобы установить транзитивность, предположим, что заданы диффеоморфизмы $h_0, h_1, h_2: M \rightarrow M'$ и изотопии $f, g: M \times I \rightarrow M'$ между h_0 и h_1 и между h_1 и h_2 соответственно. Пусть $m: I \rightarrow I$ — гладкая монотонная функция, такая, что $m(t) = 0$ при $0 \leq t \leq 1/3$ и $m(t) = 1$ при $2/3 \leq t \leq 1$. Требуемая изотопия $k: M \times I \rightarrow M'$ между h_0 и h_1 определяется равенствами $k(x, t) = f(x, m(2t))$ при $0 \leq t \leq 1/2$ и $k(x, t) = g(x, m(2t - 1))$ при $1/2 \leq t \leq 1$. Доказательство транзитивности псевдоизотопии более трудно и следует из леммы 6.1 Манкреса [8].

Ясно, что если диффеоморфизмы h_0 и h_1 изотопны, то они и псевдоизотопны, так как если $f: M \times I \rightarrow M'$ — изотопия, то $\bar{f}: M \times I \rightarrow M' \times I$, где $\bar{f}(x, t) = (f_t(x), t)$, есть диффеоморфизм, что вытекает из теоремы об обратной функции, и, следовательно, \bar{f} — псевдоизотопия между h_0 и h_1 . (Обратное утверждение для $M = S^n$, $n \geq 8$, было доказано Дж. Серфом [22].) Из этого замечания, а также из теоремы 1.9 следует, что если h_0 и h_1 изотопны, то $c_{h_0} = c_{h_1}$.

Теорема 1.9. Равенство $c_{h_0} = c_{h_1}$ эквивалентно псевдоизотопности h_0 и h_1 .

Доказательство. Пусть $g: M \times I \rightarrow M' \times I$ есть псевдоизотопия между h_0 и h_1 . Определим $h_0^{-1} \times 1: M' \times I \rightarrow M \times I$, положив $(h_0^{-1} \times 1)(x, t) = (h_0^{-1}(x), t)$. Тогда отображение $(h_0^{-1} \times 1) \circ g$ устанавливает эквивалентность c_{h_1} и c_{h_0} . Обратное проверяется аналогично.

§ 2. ФУНКЦИЯ МОРСА

Было бы желательно представлять произвольный данный кобордизм в виде композиции более простых. (Например, триада на рис. 2.1 может быть разложена на триады согласно рис. 2.2.) Ниже мы уточним это понятие разложения.

Определение 2.1. Пусть W — гладкое многообразие и $f: W \rightarrow R$ — гладкая функция. Точка $p \in W$ называется *критической точкой* f , если в некоторой системе координат

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_p = \dots = \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p = 0.$$

Критическая точка называется *невыврожденной*, если $\det \left(\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_p \right) \neq 0$. Например, если на рис. 2.1 определить f как функцию высоты (проекцию на ось z), то f будет иметь четыре критических точки p_1, p_2, p_3, p_4 , причем все невырожденные.

Лемма 2.2. (М. Морс). Если p — невырожденная критическая точка f , то в некоторой системе координат $f(x_1, \dots, x_n) = \text{const} - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ в окрестности p для некоторого $\lambda, 0 \leq \lambda \leq n$.

По определению, λ — индекс критической точки p .

Доказательство. См. Милнор [16].

Определение 2.3. Функцией Морса триады гладких многообразий $(W; V_0, V_1)$ называется всякая гладкая функция $f: W \rightarrow [a, b]$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $f^{-1}(a) = V_0$, $f^{-1}(b) = V_1$;
- 2) все критические точки f являются внутренними (т. е. лежат в $W - dW$) и невырождены.

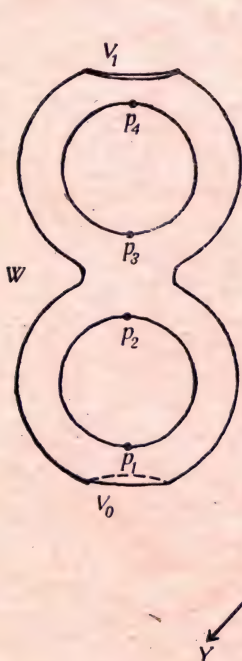


Рис. 2.1.

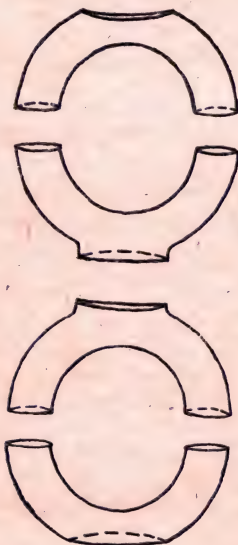


Рис. 2.2.

Из леммы Морса следует, что критические точки функции Морса являются изолированными. Ввиду компактности W их конечное число.

Определение 2.4. Числом Морса μ триады $(W; V_0, V_1)$ называется минимум числа критических точек, взятый по всем функциям Морса f .

Это определение имеет смысл в силу следующей теоремы существования:

Теорема 2.5. Всякая триада гладких многообразий $(W; V_0, V_1)$ обладает функцией Морса.

Доказательство займет несколько следующих страниц.

Лемма 2.6. *Существует гладкая функция $f: W \rightarrow [0, 1]$, $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$, не имеющая критических точек в окрестности границы W .*

Доказательство. Пусть U_1, \dots, U_k образуют покрытие W координатными окрестностями. Мы можем предположить, что ни одна из окрестностей U_i не пересекает V_0 и V_1 одновременно и что при $U_i \cap dW \neq \emptyset$ координатное отображение $h_i: U_i \rightarrow R_+^n$ переводит U_i на пересечение открытого единичного шара с R_+^n .

Определим на каждом U_i отображение $f_i: U_i \rightarrow [0, 1]$ по следующей схеме. Если $U_i \cap V_0 \neq \emptyset$ (соответственно V_1), то пусть $f_i = Lh_i$, где L есть отображение $\vec{Lx} = x_n$ (соответственно $1 - x_n$). Если $U_i \cap dW = \emptyset$, положим $f_i = 1/2$ тождественно. Выберем разбиение единицы $\{\varphi_i\}$, отправляясь от покрытия $\{U_i\}$ (см. Манкрес [8], и определим отображение $f: W \rightarrow [0, 1]$, положив

$$f(p) = \varphi_1(p)f_1(p) + \dots + \varphi_k(p)f_k(p),$$

где $f_i(p) = 0$ вне U_i . Очевидно, что f есть корректно определенное гладкое отображение на $[0, 1]$, причем $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$. В заключение проверим, что $df \neq 0$ на dW . Пусть $q \in V_0$ (соответственно $q \in V_1$). Тогда для некоторого i , $\varphi_i(q) > 0$ и $q \in U_i$. Пусть $h_i(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$. Получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^k f_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} + \left\{ \varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \dots + \varphi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + \dots \right\}.$$

Однако $f_j(z) = 0$ (соответственно 1) для всех j , так что

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \left\{ \sum_{j=1}^k \varphi_j \right\} = 0.$$

Итак, первое слагаемое в точке q равно нулю. Производная $\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(q)$ равна 1 (соответственно -1), и легко видеть, что все производные $\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(q)$, $j = 1, \dots, k$, имеют тот же знак, что и $\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(q)$. Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial x_n}(q) \neq 0$. Отсюда следует, что $df \neq 0$ на dW и, следовательно, $df \neq 0$ в окрестности dW .

Оставшаяся часть доказательства более трудна. Мы будем шаг за шагом изменять f во внутренней области W , удаляя вырожденные критические точки. Для осуществления этого плана нам потребуются три леммы, область применения которых — евклидово пространство.

Лемма А (М. Морс). Если f есть отображение класса C^2 открытого подмножества $U \subset R^n$ на действительную прямую, то для почти всех линейных отображений $L: R^n \rightarrow R$ функция $f+L$ имеет только невырожденные критические точки.

Под термином «почти все» подразумевается множество, дополнение к которому в $\text{Hom}_R(R^n, R) \cong R^n$ имеет меру нуль.

Доказательство. Рассмотрим многообразие $U \times \text{Hom}_R(R^n, R)$. Оно содержит подмногообразие $M = \{(x, L) \mid d(f(x) + L(x)) = 0\}$. Так как $d(f(x) + L(x)) = 0$ эквивалентно $L = -df(x)$, то ясно, что соответствие $x \rightarrow (x, -df(x))$ есть диффеоморфизм U на M . Каждая точка $(x, L) \in M$ соответствует критической точке $f+L$, и эта критическая точка вырождена именно тогда, когда матрица $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$ необратима. Рассмотрим проекцию $\pi: M \rightarrow \text{Hom}_R(R^n, R)$, переводящую (x, L) в L . Поскольку $L = -df(x)$, проекция есть не что иное, как отображение $x \rightarrow -df(x)$. Таким образом, отображение π является критическим в $(x, L) \in M$ именно в том случае, когда матрица $d\pi = -(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$ необратима. Отсюда следует, что $f+L$ имеет вырожденную критическую точку (для не-

которого x) тогда и только тогда, когда L есть образ критической точки отображения $\pi: M \rightarrow \text{Hom}_R(R^n, R) \cong R^n$. Но по теореме Сарда (см. де Рам [19, стр. 30]) имеем:

Если $\pi: M^n \rightarrow R^n$ есть отображение класса C^1 , то образ множества критических точек π имеет в R^n меру нуль.

Из этого следует желаемое утверждение.

Лемма В. Пусть K — компактное подмножество открытого множества $U \subset R^n$. Если $f: U \rightarrow R$ принадлежит классу C^2 и имеет в K лишь невырожденные критические точки, то существует число $\delta > 0$, такое, что если $g: U \rightarrow R$ принадлежит C^2 и во всех точках K удовлетворяет неравенствам

$$(1) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| < \delta, \quad (2) \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta,$$

$i, j = 1, \dots, n$, то g также имеет в K только невырожденные критические точки.

Доказательство. Положим

$$|df| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Тогда $|df| + \left| \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right|$ есть строго положительная на K функция. Пусть $\mu > 0$ есть минимум этой функции на K . Возьмем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы из (1) вытекало неравенство $||df| - |dg|| < \mu/2$, а из (2) — неравенство

$$\left| \left| \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| - \left| \det \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| \right| < \mu/2$$

Тогда во всех точках K

$$|dg| + \left| \det \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| > |df| + \left| \det \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right| - \mu/2 - \mu/2 \geq 0.$$

Лемма доказана.

Лемма С. Пусть $h: U \rightarrow U'$ есть диффеоморфизм одного открытого подмножества R^n на другое, переводящий компакт $K \subset U$ на компакт $K' \subset U'$. Для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что если гладкое отображение $f: U' \rightarrow R$ удовлетворяет неравенствам

$$|f| < \delta, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \delta, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

во всех точках $K' \subset U'$, то отображение $f \circ h$ удовлетворяет неравенствам

$$|f \circ h| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial (f \circ h)}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial^2 (f \circ h)}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \varepsilon, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

во всех точках K .

Доказательство. Каждая из функций $f \circ h$, $\frac{\partial (f \circ h)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 (f \circ h)}{\partial x_i \partial x_j}$ есть полиномиальная функция частных производных f и h порядка от 0 до 2; эти полиномы обращаются в нуль, когда обращается в нуль f . Производные же h ограничены на компакте K . Дальнейшее очевидно.

На множестве $F(M, R)$ гладких действительных функций на компактном многообразии M (с краем) можно следующим образом определить C^2 -топологию. Пусть $\{U_\alpha\}$ — конечное координатное покрытие с координатными отображениями $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^n$, и пусть $\{C_\alpha\}$ — компактное сужение $\{U_\alpha\}$ (ср. Манкрес [8]).

Для всякой положительной постоянной $\delta > 0$ определим подмножество $N(\delta) \subset F(M, R)$, состоящее из всех отображений $g: M \rightarrow R$, таких, что для всех α

$$|g_\alpha| < \delta, \quad \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \right| < \delta, \quad \left| \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta \quad (*)$$

во всех точках $h_\alpha(C_\alpha)$, где $g_\alpha = g h_\alpha^{-1}$ и $i, j = 1, \dots, n$. Если мы возьмем множества $N(\delta)$ в качестве базы окрестностей нулевой функции аддитивной группы $F(M, R)$, то полученная топология и будет называться

C^2 -топологией. Множества вида $f + N(\delta) = N(f, \delta)$ образуют базу окрестностей произвольного отображения $f \in F(M, R)$, а $g \in N(f, \delta)$ означает, что для всех α

$$|f_\alpha - g_\alpha| < \delta, \quad \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \right| < \delta, \quad \left| \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta$$

во всех точках $h_\alpha(C_\alpha)$.

Следует проверить, что определенная нами топология T не зависит от частного выбора координатного покрытия и компактного сужения $\{C_\alpha\}$. Пусть T' — какая-либо другая топология, определенная с помощью вышеописанного построения, и пусть штрих указывает на принадлежность объектов к этой топологии. Достаточно показать, что для произвольного наперед заданного множества $N(\delta)$ из T найдется $N'(\delta')$ из T' , содержащееся в $N(\delta)$. Но это сразу следует из леммы С.

Мы рассмотрим сначала многообразие M без края, т. е. триаду $(M; \emptyset, \emptyset)$, так как этот случай несколько более простой.

Теорема 2.7. *Если M — компактное многообразие без края, то функции Морса образуют открытое всюду плотное в C^2 -топологии подмножество $F(M, R)$.*

Доказательство. Пусть $(U_1, h_1), \dots, (U_k, h_k)$ — конечное покрытие M координатными окрестностями. Мы легко можем построить компактные множества $C_i \subset U_i$, так что C_1, C_2, \dots, C_k покрывают M .

Мы будем говорить, что f «правильна» на множестве $S \subset M$, если S не содержит вырожденных критических точек f .

I) Множество функций Морса открыто. Действительно, если $f: M \rightarrow R$ — функция Морса, то лемма В утверждает, что в некоторой окрестности $N_i \subset F(M, R)$ функции f любая функция будет правильной в C_i . Таким образом, в окрестности $N = N_1 \cap \dots \cap N_k \ni f$ любая функция будет правильной в $C_1 \cup \dots \cup C_k = M$.

II) Множество функций Морса всюду плотно. Пусть N — заданная окрестность функции $f \in F(M, R)$. Мы улучшим f в несколько этапов. Пусть λ — гладкая функция $M \rightarrow [0, 1]$, такая, что $\lambda = 1$ в окрестности C_1

и $\lambda=0$ в окрестности $M - U_1$. Для почти всякого линейного отображения $L: R^n \rightarrow R$ функция $f_1(p) = f(p) + \lambda(p)L(h_1(p))$ будет правильной на $C_1 \subset U_1$ (лемма А). Мы утверждаем, что при достаточно малых коэффициентах линейного отображения L функция f_1 будет лежать в заданной окрестности N функции f .

Для начала заметим, что f_1 отличается от f только на компакте $K = \text{Supp } \lambda \subset U_1$. Положив $L(x) = L(x_1, \dots, x_n) = \sum l_i x_i$, получим:

$$f_1 h_1^{-1}(x) - f h_1^{-1}(x) = (\lambda h_1^{-1}(x)) \sum l_i x_i$$

для всех $x \in h_1(K)$. Выбрав l_i достаточно малыми, мы, очевидно, сможем гарантировать, что эта разность вместе со своими первыми и вторыми производными будет меньше любого наперед заданного ε на всем множестве $h_1(K)$. Но для достаточно малого ε функция f_1 , как следует из леммы С, будет принадлежать окрестности N .

Мы получили функцию f_1 из N , правильную на C_1 . Вторично применяя лемму В, выберем окрестность N_1 функции f_1 , $N_1 \subset N$, так, чтобы любая функция из N_1 была все еще правильной на C_1 . Этим завершается первый этап.

Второй этап состоит в простом повторении всего процесса в применении к f_1 и N_1 для получения функции f_2 в N_1 , правильной в C_2 , и окрестности $N_2 \ni f_2$, $N_2 \subset N_1$, содержащей лишь правильные на C_2 функции. Функция f_2 автоматически правильна на C_1 , так как она лежит в N_1 . Наконец, мы получим функцию $f_k \in N_k \subset N_{k-1} \subset \dots \subset N_1 \subset N$, правильную на $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k = M$.

Мы можем теперь доказать следующее утверждение:

Теорема 2.5. *На всякой триаде $(W; V_0, V_1)$ существует функция Морса.*

Доказательство. Лемма 2.6 обеспечивает существование функции $f: W \rightarrow [0, 1]$, такой, что (i) $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$; (ii) f не имеет критических точек в окрестности dW .

Мы намерены устранить вырожденные критические точки на $W - dW$, не нарушая свойств (i) и (ii) функции f . Пусть U — открытая окрестность границы dW , на которой f не имеет критических точек. В силу нормальности W существует открытая окрестность $V \supset \supset dW$, такая, что $\bar{V} \subset U$. Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие W координатными окрестностями, причем такими, что каждая окрестность U_i целиком принадлежит либо U , либо $W - \bar{V}$. Возьмем компактное сужение $\{C_i\}$ покрытия $\{U_i\}$ и обозначим через C_0 объединение всех C_i , лежащих в U . Точно так же, как и для многообразия без края в последней теореме, мы можем использовать лемму В для того, чтобы показать, что в достаточно малой окрестности $N \ni f$ никакая функция не будет иметь вырожденных критических точек на C_0 . Кроме того, на компактном множестве $W - V$ функция f строго ограничена сверху и снизу нулем и единицей соответственно. Следовательно, любая функция g из некоторой окрестности $N' \ni f$ удовлетворяет на $W - V$ условию $0 < g < 1$. Пусть $N_0 = N \cap N'$. Можно предполагать, что координатные окрестности в $W - V$ суть U_1, \dots, U_k . С этого момента мы будем действовать в точности так же, как и в предыдущей теореме. С помощью леммы А найдем функцию f_1 в N_0 , правильную (т. е. имеющую только невырожденные критические точки) на C_1 , и окрестность $N_1 \ni f_1$, $N_1 \subset N_0$, в которой всякая функция правильна на C_1 . Повторив этот процесс k раз, мы построим функцию $f_k \in N_k \subset \subset N_{k-1} \subset \dots \subset N_0$, правильную на $C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_k = M$. Так как $f_k \in N_0 \subset N'$ и $f_k|_V = f|_V$, то f_k удовлетворяет обоим условиям (i) и (ii). Следовательно, f_k есть функция Морса для $(W; V_0, V_1)$.

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что в C^2 -топологии функции Морса образуют открытое всюду плотное подмножество множества всех гладких отображений $f: (W; V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1]; [0, 1])$.

Для некоторых целей удобно иметь функцию Морса, никакая пара критических точек которой не лежит на одном уровне.

Лемма 2.8. Пусть $f: W \rightarrow [0, 1]$ — функция Морса триады $(W; V_0, V_1)$ с критическими точками p_1, \dots, p_k . Тогда f может быть аппроксимирована функцией Морса g с теми же критическими точками, причем $g(p_i) \neq g(p_j)$ при $i \neq j$.

Доказательство. Предположим, что $f(p_1) = f(p_2)$. Построим гладкую функцию $\lambda: W \rightarrow [0, 1]$, такую, что $\lambda = 1$ в окрестности $U \ni p_1$ и $\lambda = 0$ вне большей окрестности N , причем $\bar{N} \subset W - dW$ и $\bar{N} \not\ni p_i, i \neq 1$. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ настолько малым, чтобы значения $f_0 = f + \varepsilon_1 \lambda$ принадлежали $[0, 1]$ и $f_0(p_1) \neq f_0(p_i), i \neq 1$. Введем на W риманову метрику (см. Манкрес [8]) и выберем постоянные c и c' таким образом, чтобы на компакте K , замыкании множества точек, в которых $0 < \lambda < 1$, выполнялись неравенства $0 \leq c \leq |\text{grad } f|$ и $|\text{grad } \lambda| \leq c'$. Пусть $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_1, c/c')$. Тогда $f_1 = f + \varepsilon \lambda$ также есть функция Морса, $f_1(p_1) \neq f(p_i)$ при $i \neq 1$, и критические точки f_1 и f совпадают. Действительно, на K имеем

$$|\text{grad}(f + \varepsilon \lambda)| \geq |\text{grad } f| - |\varepsilon \text{grad } \lambda| > c - \varepsilon c' > 0.$$

При этом $|\text{grad } \lambda| = 0$ вне K , так что $|\text{grad } f_1| = |\text{grad } f|$. Продолжив по индукции это построение, мы получим функцию Морса g , отделяющую все критические точки. Этим заканчивается доказательство.

Используя функции Морса, мы можем теперь представить любой «сложный» кобордизм как композицию «простых» кобордизмов.

Определение. Критическим значением гладкой функции $f: W \rightarrow R$ называется образ критической точки этой функции.

Лемма 2.9. Пусть $f: (W; V_0, V_1) \rightarrow ([0, 1]; 0, 1)$ — функция Морса, и пусть $0 < c < 1$, где c не является критическим значением f . Тогда $f^{-1}[0, c]$ и $f^{-1}[c, 1]$ суть гладкие многообразия с краем.

Следовательно, кобордизм $(W; V_0, V_1; i_0, i_1)$ из V_0 в V_1 (где i_0, i_1 — тождественные отображения) пред-

ставим посредством композиции двух кобордизмов: из V_0 в $f^{-1}(c)$ и из $f^{-1}(c)$ в V_1 . Вместе с леммой 2.8 это доказывает

Следствие 2.10. Всякий кобордизм представим в виде композиции кобордизмов с числом Морса, равным 1.

Доказательство леммы 2.9. Это следует из теоремы о неявной функции ввиду того, что для любой точки $w \in f^{-1}(c)$ функция f является в некоторой координатной системе x_1, x_2, \dots, x_n соответствующей окрестности W отображением проектирования $R^n \rightarrow R, (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_n$.

§ 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ КОБОРДИЗМЫ

Определение 3.1. Пусть f — функция Морса триады $(W^n; V, V')$. Векторное поле ξ на W^n называется *градиентно-подобным векторным полем* f , если:

1) $\xi(f) > 0$ на дополнении к множеству критических точек f ,

2) во всякой системе координат $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ некоторой окрестности U какой-либо критической точки p функции f , в которой (окрестности) $f = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$, поле ξ должно иметь координаты $(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ на всем множестве U .

Лемма 3.2. Для любой функции Морса f триады $(W^n; V, V')$ существует градиентно-подобное векторное поле ξ .

Доказательство. Для простоты предположим, что функция f обладает лишь одной критической точкой p ; в общем случае доказательство аналогично. Согласно лемме Морса 2.2, можно выбрать окрестность U_0 точки p с координатами $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ так, чтобы $f = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ на U_0 . Пусть окрестность U точки p такова, что $U \subset U_0$.

Всякая точка $p' \in W - U_0$ не является критической для f . Из теоремы о неявной функции следует, что существуют координаты x'_1, \dots, x'_n в окрестности $U' \ni p'$, такие, что $f = \text{const} + x'_1$ на U' .

Используя этот факт, а также компактность множества $W - U_0$, мы получим систему окрестностей U_1, \dots, U_k , такую, что

1) $W - U_0 \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$,

2) $U \cap U_i = \emptyset$; $i = 1, \dots, k$,

3) в U_i имеются координаты x_1^i, \dots, x_n^i , в которых $f = \text{const} + x_1^i$ на всем множестве U_i , $i = 1, \dots, k$.

В U_0 существует векторное поле, координаты которого суть $(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$, а в каждой окрестности U_i существует векторное поле $\partial/\partial x_1^i$ с координатами $(1, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, k$. Склеив эти векторные поля, используя разбиение единицы, ассоциированное с покрытием U_0, U_1, \dots, U_k , получим векторное поле ξ на W . Легко проверить, что ξ является искомым градиентно-подобным векторным полем для f .

Замечание. Всюду далее мы будем отождествлять триаду $(W; V_0, V_1)$ с кобордизмом $(W; V_0, V_1; i_0, i_1)$, где $i_0: V_0 \rightarrow V_0$ и $i_1: V_1 \rightarrow V_1$ — тождественные отображения.

Определение 3.3. Триада $(W; V_0, V_1)$ называется *тривиальным кобордизмом*, если она диффеоморфна триаде $(V_0 \times [0, 1]; V_0 \times 0, V_0 \times 1)$.

Теорема 3.4. Если число Морса μ триады $(W; V_0, V_1)$ равно нулю, то $(W; V_0, V_1)$ — тривиальный кобордизм.

Доказательство. Пусть $f: W \rightarrow [0, 1]$ есть функция Морса без критических точек. Согласно лемме 3.2, существует градиентно-подобное векторное поле ξ для f . Тогда $\xi(f): W \rightarrow \mathbb{R}$ — строго положительное отображение. Умножая ξ в каждой точке на положительное действительное число $1/\xi(f)$, получим, что $\xi(f) = 1$ тождественно на W .

Если p — произвольная точка на dW , то f , выраженная через координаты x_1, \dots, x_n , $x_n \geq 0$, соответствующей координатной окрестности точки p , может быть продолжена до гладкой функции g , определенной в открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Соответственно поле ξ , выраженное в этой системе координат, также продолжается на U . Таким образом, локально на W применима фундаментальная теорема теории обычно-

венных дифференциальных уравнений о существовании и единственности (см., например, Ленг [5]).

Пусть $\varphi: [a, b] \rightarrow W$ — некоторая интегральная кривая векторного поля ξ . Тогда

$$\frac{d}{dt} (f \circ \varphi) = \xi(f),$$

что тождественно равно 1; следовательно,

$$f(\varphi(t)) = t + \text{const.}$$

Произведя замену параметра: $\psi(s) = \varphi(s - \text{const})$, мы получим интегральную кривую, удовлетворяющую соотношению

$$f(\psi(s)) = s.$$

Всякая интегральная кривая единственным образом продолжаема на максимальном интервале, который в силу компактности W совпадает с $[0, 1]$. Таким образом, для каждого $y \in W$ существует единственная максимальная интегральная кривая

$$\psi_y: [0, 1] \rightarrow W,$$

проходящая через y и удовлетворяющая соотношению $f(\psi_y(s)) = s$. Далее, $\psi_y(s)$ является гладкой функцией по обоим переменным (см. § 5, стр. 53).

Искомый диффеоморфизм

$$h: V_0 \times [0, 1] \rightarrow W$$

можно описать теперь формулой

$$h(y_0, s) = \psi_{y_0}(s),$$

где

$$h^{-1}(y) = (\psi_y(0), f(y)).$$

Следствие 3.5. (Теорема о кольцевой окрестности.) Пусть W — компактное гладкое многообразие с краем. Существует окрестность края dW (называемая кольцевой окрестностью), которая диффеоморфна $dW \times [0, 1]$.

Доказательство. Согласно лемме 2.6, существует гладкая функция $f: W \rightarrow R_+$, такая, что $f^{-1}(0) = dW$ и $df \neq 0$ в окрестности $U \supset dW$. Тогда f есть функ-

ция Морса многообразия $f^{-1}[0, \varepsilon/2]$, где $\varepsilon > 0$ — нижняя граница f на компакте $W - U$. Теорема 3.4 гарантирует существование диффеоморфизма между $f^{-1}[0, \varepsilon/2]$ и $dW \times [0, 1)$.

Связное подмногообразие без края $M^{n-1} \subset W^n$ — dW^n называется *двусторонним*, если некоторая окрестность M^{n-1} в W^n распадается на две компоненты после удаления M^{n-1} .

Следствие 3.6. (Теорема о бикольцевой окрестности.) *Предположим, что все компоненты гладкого подмногообразия $M \subset W$ компактны и двусторонни. Тогда существует «бикольцевая» окрестность M в W , диффеоморфная $M \times (-1, +1)$ и такая, что M соответствует $M \times 0$.*

Доказательство. Так как компоненты M допускают покрытие попарно непересекающимися открытыми множествами в W , то достаточно рассмотреть случай однокомпонентного M .

Пусть U — открытая окрестность M в $W - dW$, причем \bar{U} компактно и содержится в окрестности M , распадающейся на две компоненты после удаления M . Тогда очевидно, что U есть объединение двух подмногообразий U_1, U_2 , так что $U_1 \cap U_2 = M$ является границей каждого из них. Как и в доказательстве леммы 2.6, можно использовать координатное покрытие и разбиение единицы для построения гладкого отображения

$$\varphi: U \rightarrow R,$$

такого, что $d\varphi \neq 0$ на M и $\varphi < 0$ на $\bar{U} - U_1$, $\varphi = 0$ на M , $\varphi > 0$ на $\bar{U} - U_2$. Мы можем выбрать открытую окрестность $V \supset M$, $\bar{V} \subset U$, на которой φ не имеет критических точек.

Пусть $2\varepsilon'' > 0$ — точная верхняя грань φ на компакте $\bar{U}_1 - V$.

Пусть $2\varepsilon' < 0$ — точная нижняя грань φ на компакте $\bar{U}_2 - V$.

Тогда $\varphi^{-1}[\varepsilon', \varepsilon'']$ является компактным n -мерным подмногообразием V с границей $\varphi^{-1}(\varepsilon') \cup \varphi^{-1}(\varepsilon'')$ и φ есть функция Морса этого многообразия. Применяя

теорему 3.1, найдем, что $\varphi^{-1}(\varepsilon', \varepsilon'')$ и есть «бикольцевая» окрестность M в V , а следовательно, и в W .

Замечание. Теоремы о кольцевой и бикольцевой окрестностях верны и без условия компактности (Манкрес [8]).

Теперь мы вновь сформулируем, а затем и докажем один результат § 1.

Теорема 1.4. Пусть $(W; V_0, V_1)$ и $(W'; V'_1, V'_2)$ — две триады гладких многообразий и $h: V_1 \rightarrow V'_1$ — диффеоморфизм. Тогда существует гладкая структура \mathcal{S} на $W \cup_h W'$, согласованная с исходными структурами на W и W' . Структура \mathcal{S} — единственная с точностью до диффеоморфизма, тождественного на V_0 , $h(V_1) = V'_1$ и V'_2 .

Доказательство. Существование. Согласно следствию 3.5, существуют кольцевые окрестности U_1, U'_1 многообразий V_1, V'_1 в W, W' соответственно и диффеоморфизмы $g_1: V_1 \times (0, 1] \rightarrow U_1$, $g_2: V'_1 \times [1, 2) \rightarrow U'_1$; такие, что $g_1(x, 1) = x, x \in V_1$, и $g_2(y, 1) = y, y \in V'_1$. Пусть $j: W \rightarrow W \cup_h W'$, $j': W' \rightarrow W \cup_h W'$ суть отображения вложения в определении $W \cup_h W'$. Определим отображение $g: V_1 \times (0, 2) \rightarrow W \cup_h W'$, полагая

$$\begin{aligned} g(x, t) &= j(g_1(x, t)), & 0 < t \leq 1, \\ g(x, t) &= j'(g_2(h(x), t)), & 1 \leq t < 2. \end{aligned}$$

Чтобы определить гладкую структуру на многообразии, достаточно определить согласованные гладкие структуры на открытых множествах, покрывающих многообразие. Для $W \cup_h W'$ покрытием служит объединение множеств $j(W - V_1)$, $j'(W' - V'_1)$ и $g(V_1 \times (0, 2))$, причем гладкие структуры, определенные на них посредством j, j' и g соответственно, согласованы. На этом доказательство существования закончено.

Единственность. Мы покажем, что любая гладкая структура \mathcal{S} на $W \cup_h W'$, согласованная с данными структурами на W и W' , изоморфна гладкой структуре, построенной с помощью описанной выше склейки

кольцевых окрестностей V и V'_1 . Единственность с точностью до диффеоморфизма, тождественного на V_0 , $h(V_1) = V'_1$ и V'_2 , следует тогда в основном из теоремы 6.3 Манкреса (см. [8]). Согласно следствию 3.6, существуют бикольцевая окрестность U многообразия $j(V_1) = j'(V'_1)$ в $W \cup_h W'$ и диффеоморфизм $g: V_1 \times (-1, 1) \rightarrow U$ на гладкой структуре \mathcal{S} , так что $g(x, 0) = j(x)$, когда $x \in V_1$. Таким образом, $j^{-1}(U \cap j(W))$ и $j'^{-1}(U \cap j'(W'))$ являются кольцевыми окрестностями V_1 и V'_1 в W и W' . Этим завершается доказательство единственности.

Предположим теперь, что нам даны триады $(W; V_0, V_1)$, $(W'; V'_1, V'_2)$ и функции Морса f, f' на них со значениями на отрезках $[0, 1]$, $[1, 2]$ соответственно. Построим для f и f' градиентно-подобные векторные поля ξ и ξ' на W и W' соответственно, нормированные таким образом, чтобы $\xi(f) = 1$, $\xi'(f') = 1$ всюду, за исключением малых окрестностей критических точек.

Лемма 3.7. Всякому диффеоморфизму $h: V_1 \rightarrow V'_1$ отвечает единственная гладкая структура на $W \cup_h W'$, согласованная с исходными структурами на W , W' и такая, что f и f' составляют вместе гладкую функцию на $W \cup_h W'$, а ξ и ξ' — гладкое векторное поле.

Доказательство. Доказательство такое же, как и для теоремы 1.4 выше, за исключением того факта, что гладкая структура на бикольцевой окрестности должна быть построена «стыкованием» интегральных кривых полей ξ и ξ' в кольцевых окрестностях V_1 и V'_1 . Это условие дает также и единственность. (Заметим, что здесь единственность понимается в гораздо более сильном смысле, нежели в теореме 1.4.)

Из этой конструкции немедленно получается доказательство следующего результата:

Следствие 3.8. $\mu(W \cup_h W'; V_0, V'_2) \leq \mu(W; V_0, V_1) + \mu(W'; V'_1, V'_2)$, где μ — число Морса триады.

Ниже мы рассмотрим кобордизмы с числом Морса $\mu = 1$.

Пусть $(W; V, V')$ — триада с функцией Морса $f: W \rightarrow R$ и градиентно-подобным векторным полем ξ для f . Предположим, что $p \in W$ — критическая точка, $V_0 = f^{-1}(c_0)$ и $V_1 = f^{-1}(c_1)$ — многообразия уровней, так что $c_0 < f(p) < c_1$, и $c = f(p)$ — единственное критическое значение на отрезке $[c_0, c_1]$.

Пусть OD_r^p обозначает открытый шар радиуса r с центром в $0 \in R^p$, и пусть $OD_1^p = OD^p$.

Так как ξ — градиентно-подобное векторное поле для f , то для некоторых λ , $-1 \leq \lambda \leq n$, и $\varepsilon > 0$ существует окрестность U точки p в W и координатный

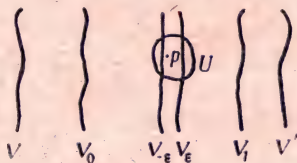


Рис. 3.1.

диффеоморфизм $g: OD_{2\varepsilon}^n \rightarrow U$, так что, $f \circ g(\vec{x}, \vec{y}) = c - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ и $\xi = (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$ в U . Здесь $\vec{x} = (x_1, \dots, x_\lambda) \in R^\lambda$ и $\vec{y} = (x_{\lambda+1}, \dots, x_n) \in R^{n-\lambda}$. Положим $V_{-\varepsilon} = f^{-1}(c - \varepsilon^2)$ и $V_{\varepsilon} = f^{-1}(c + \varepsilon^2)$. Мы можем предполагать, что $4\varepsilon^2 < \min(|c - c_0|, |c - c_1|)$, так что $V_{-\varepsilon}$ находится между V_0 и $f^{-1}(c)$, а V_{ε} — между $f^{-1}(c)$ и V_1 . Схематически эта ситуация изображена на рис. 3.1.

Обозначим через S^{p-1} границу замкнутого единичного диска D_p в R_p .

Определение 3.9. *Характеристическое вложение $\varphi_L: S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V_0$ строится следующим образом. Сначала определим вложение $\varphi: S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V_{-\varepsilon}$, положив $\varphi(u, \theta v) = g(\varepsilon u \operatorname{ch} \theta, \varepsilon v \operatorname{sh} \theta)$ для $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$, $0 \leq \theta < 1$. Интегральная кривая поля ξ , выходящая из точки $\varphi(u, \theta v) \in V_{-\varepsilon}$, не сингулярна и проходит от точки $\varphi(u, \theta v)$ к некоторой единственным образом определенной точке $\varphi_L(u, \theta v)$ на*

V_0 . Определим левостороннюю сферу S_L точки $p \in V_0$ как образ $\varphi_L(S^{\lambda-1} \times 0)$. Заметим, что S_L есть в точности пересечение всех интегральных кривых поля ξ , ведущих в критическую точку p , с многообразием V_0 . Левосторонний диск D_L есть гладкий образ евклидова диска, имеющий границей S_L и определенный как объединение отрезков интегральных кривых, начинающихся на S_L и оканчивающихся в p .

Подобным образом характеристическое вложение $\varphi_R: OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \rightarrow V_1$ получается посредством вложения $OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1} \rightarrow V_0$, определенного формулой $(\theta u, v) \rightarrow g(\varepsilon u \operatorname{sh} \theta, \varepsilon v \operatorname{ch} \theta)$, и последующей трансляцией образа на V_1 . Правосторонняя сфера S_R точки p на V_1 определяется как $\varphi_R(0 \times S^{n-\lambda-1})$. Она является границей правостороннего диска D_R , определенного как объединение отрезков интегральных кривых ξ , начинающихся в p и оканчивающихся на S_R .

Определение 3.10. Элементарным кобордизмом называется триада $(W; V, V')$, на которой существует функция Морса с единственной критической точкой p .

З а м е ч а н и е. Из 3.15 (см. ниже) следует, что элементарный кобордизм $(W; V, V')$ не является тривиальным, и, следовательно, в силу теоремы 3.4, число Морса триады $(W; V, V')$ равно единице. Из 3.15 также видно, что индекс элементарного кобордизма $(W; V, V')$, определяемый как индекс точки p функции Морса f , корректно определен (т. е. не зависит от выбора f и p).

Пример элементарного кобордизма размерности $n=2$ с индексом $\lambda=1$ изображен на рис. 3.2.

Определение 3.11. Пусть многообразие V имеет размерность $n-1$, и пусть задано вложение $\varphi: S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V$. Обозначим через $\chi(V, \varphi)$ фактормногообразие, полученное из теоретико-множественной суммы $(V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) + (OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1})$ отождествлением $\varphi(u, \theta v)$ с $(\theta u, v)$ для всех $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$, $0 < \theta < 1$. Если через V' обозначить многообразие, диффеоморфное $\chi(V, \varphi)$, то мы будем говорить, что V' можно получить из V перестройкой типа $(\lambda, n-\lambda)$.

Таким образом, перестройка $(n-1)$ -мерного многообразия состоит в изъятии вложенной сферы размерности $\lambda-1$ и замене ее вложенной сферой размерности $n-\lambda-1$. Два следующих результата показывают, что этот процесс соответствует возникновению на n -мерном многообразии критической точки индекса λ некоторой функции Морса.

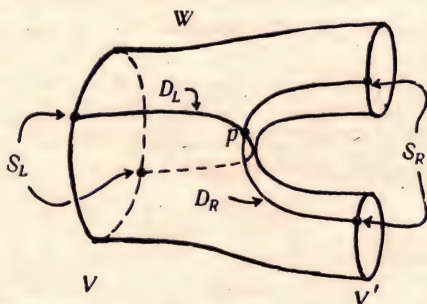


Рис. 3.2.

Теорема 3.12. Если $V' = \chi(V, \varphi)$ может быть получено из V перестройкой типа $(\lambda, n-\lambda)$, то существуют элементарный кобордизм $(W; V, V')$ и функция Морса $f: W \rightarrow R$ с единственной критической точкой индекса λ .

Доказательство. Обозначим через L_λ множество точек (\vec{x}, \vec{y}) в пространстве $R^\lambda \times R^{n-\lambda} = R^n$, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leq -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \leq 1$, $|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| < \text{sh } 1 \cdot \text{ch } 1$. Таким образом, L_λ — дифференцируемое многообразие с двумя краями. «Левый» край, $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1$, диффеоморфен $S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda}$, согласно соответствию $(u, \theta v) \leftrightarrow (u \text{ ch } \theta, v \text{ sh } \theta)$, $0 \leq \theta < 1$. «Правый» край, $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = 1$, диффеоморфен $OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$, согласно соответствию $(\theta u, v) \leftrightarrow (u \text{ sh } \theta, v \text{ ch } \theta)$.

Рассмотрим траектории, ортогональные поверхности $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = \text{const}$. Траектории, проходящие

через точку (\vec{x}, \vec{y}) , могут быть параметризованы согласно формуле $t \rightarrow (t\vec{x}, t^{-1}\vec{y})$. Если \vec{x} или \vec{y} равны нулю, траектория будет отрезком прямой, входящей в начало координат. Для отличных от нуля \vec{x} и \vec{y} траектория будет гиперболой, выходящей из некоторой вполне определенной точки $(u \operatorname{ch} \theta, v \operatorname{sh} \theta)$ на левом крае L_λ и ведущей в соответствующую точку $(u \operatorname{sh} \theta, v \operatorname{ch} \theta)$ на правом крае.

Мы построим n -мерное многообразие $W = \omega(V, \varphi)$ следующим образом. Начнем с теоретико-множественной суммы $(V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 + L_\lambda$. Для каждого $u \in S^{\lambda-1}$, $v \in S^{n-\lambda-1}$, $0 < \theta < 1$, $c \in D^1$ отождествим точку $(\varphi(u, \theta v), c)$ в первом слагаемом с единственной точкой $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$ таким образом, чтобы:

$$1) \quad -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c,$$

2) (\vec{x}, \vec{y}) принадлежало ортогональной траектории, проходящей через точку $(u \operatorname{ch} \theta, v \operatorname{sh} \theta)$.

Легко видеть, что это соответствие определяет диффеоморфизм $\varphi(S^{\lambda-1} \times (OD^{n-\lambda} - 0)) \times D^1 \leftrightarrow L_\lambda \cap (R^\lambda - 0) \times (R^{n-\lambda} - 0)$. Отсюда следует, что $\omega(V, \varphi)$ является корректно определенным гладким многообразием.

Это многообразие $\omega(V, \varphi)$ имеет два края, отвечающих двум значениям $c = -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = -1$ и $c = +1$. Левый край, $c = -1$, может быть отождествлен с V , если каждой точке $z \in V$ поставить в соответствие точку

$$\begin{cases} (z, -1) \in (V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 & \text{при } z \notin \varphi(S^{\lambda-1} \times 0), \\ (u \operatorname{ch} \theta, v \operatorname{sh} \theta) \in L_\lambda & \text{при } z = \varphi(u, \theta v). \end{cases}$$

Правый край может быть отождествлен с $\chi(V, \varphi)$, если принять, что $z \in V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)$ соответствует $(z, +1)$ и $(\theta u, v) \in OD^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ соответствует $(u \operatorname{sh} \theta, v \operatorname{ch} \theta)$.

Функция $f: \omega(V, \varphi) \rightarrow R$ определяется соотношениями:

$$\begin{cases} f(z, c) = c & \text{при } (z, c) \in (V - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1, \\ f(\vec{x}, \vec{y}) = -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 & \text{при } (\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda. \end{cases}$$

Легко проверить, что f корректно определена и является функцией Морса с единственной критической точкой индекса λ . Доказательство теоремы закончено.

Теорема 3.13. Пусть $(W; V, V')$ — элементарный кобордизм с характеристическим вложением $\varphi_L: S^{\lambda-1} \times \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V$. Тогда триада $(W; V, V')$ диффеоморфна триаде $(\omega(V, \varphi_L); V, \chi(V, \varphi_L))$.

Доказательство. Используя обозначения определения 3.9 при $V=V_0$ и $V'=V_1$, мы получим из 3.4, что $(f^{-1}([c_0, c - \varepsilon^2]); V, V_{-\varepsilon})$ и $(f^{-1}([c + \varepsilon^2, c_1]); V_{\varepsilon}, V')$ являются тривиальными кобордизмами. Таким образом, $(W; V, V')$ диффеоморфно $(W_{\varepsilon}; V_{-\varepsilon}, V_{\varepsilon})$, где $W_{\varepsilon} = f^{-1}([c - \varepsilon^2, c + \varepsilon^2])$. Так как $(\omega(V, \varphi_L); V, \chi(V, \varphi_L))$, очевидно, диффеоморфно $(\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi); V_{-\varepsilon}, \chi(V_{-\varepsilon}, \varphi))$, то достаточно показать, что $(W_{\varepsilon}; V_{-\varepsilon}, V_{\varepsilon})$ диффеоморфно $(\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi); V_{-\varepsilon}, \chi(V_{-\varepsilon}, \varphi))$.

Определим диффеоморфизм $k: \omega(V_{-\varepsilon}, \varphi) \rightarrow W$ так: для каждого $(z, t) \in (V_{-\varepsilon} - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1$ пусть $k(z, t)$ есть единственная точка W_{ε} , лежащая на интегральной кривой, проходящей через точку z и такая, что $f(k(z, t)) = \varepsilon^2 t + c$. Для каждой точки $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\lambda}$ положим $k(\vec{x}, \vec{y}) = g(\varepsilon \vec{x}, \varepsilon \vec{y})$. Из определения φ и $\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi)$, а также из того факта, что g переводит ортогональные траектории из L_{λ} в интегральные кривые в W_{ε} , следует, что мы получили корректно определенный диффеоморфизм $\omega(V_{-\varepsilon}, \varphi)$ на W_{ε} . Этим завершается доказательство.

Теорема 3.14. Пусть (W, V, V') — элементарный кобордизм, которому соответствует функция Морса с одной критической точкой индекса λ . Пусть D_L — левосторонний диск, соответствующий некоторому фиксированному градиентно-подобному векторному полю. Тогда $V \cup D_L$ является деформационным ретрактом W .

Следствие 3.15. Группа $H_*(W, V)$ изоморфна группе целых чисел \mathbb{Z} в размерности λ и равна нулю в других размерностях. Образующей группы $H_{\lambda}(W, V)$ является диск D_L .

Доказательство следствия. Имеем

$$\begin{aligned} H_*(W, V) &\cong H_*(V \cup D_L, V) \cong H_*(D_L, S_L) \cong \\ &\cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{в размерности } \lambda, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \end{aligned}$$

где второй изоморфизм является вырезанием.

Доказательство теоремы 3.14. В силу теоремы 3.13 мы можем предполагать, что для характеристического вложения $\varphi_L: S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda} \rightarrow V$ с точностью до отождествлений имеет место равенство

$$W = \omega(V, \varphi_L) = (V - \varphi_L(S^{\lambda-1} \times 0)) \times D^1 + L_\lambda,$$

где D_L — диск

$$\{(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda \mid |\vec{y}| = 0\}.$$

Обозначим через

$$C = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda \mid |\vec{y}| \leq 1/10\}$$

цилиндрическую окрестность D_L высоты $1/10$.

Определим деформационные ретракции $r_t: W$ на $V \cup C$ и $r'_t: V \cup C$ на $V \cup D_L$. (Здесь $t \in [0, 1]$.) Их композиция дает требуемую ретракцию.

1-я ретракция: вне L_λ сжатие вдоль траекторий к V ; на L_λ сжатие вдоль траекторий к C или V . Точнее, для каждого $(v, c) \in (V - \varphi_L(S^{\lambda-1} \times OD^{n-\lambda})) \times D^1$ определим $r_t(v, c) = (v, c - t(c+1))$.

Для каждого $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_\lambda$ определим

$$r_t(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} (\vec{x}, \vec{y}), & \text{если } |\vec{y}| \leq \frac{1}{10}, \\ \left(\frac{\vec{x}}{\rho}, \rho \vec{y}\right), & \text{если } |\vec{y}| \geq \frac{1}{10}, \end{cases}$$

где $\rho = \rho(\vec{x}, \vec{y}, t)$ есть максимум из $1/(10|\vec{y}|)$ и положительного действительного решения (относительно ρ) уравнения

$$-\frac{|\vec{x}|^2}{\rho^2} + \rho^2 |\vec{y}|^2 = (-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2)(1-t) - t.$$

Так как при $|\vec{y}| \geq 1/10$ это уравнение имеет единственное непрерывно меняющееся решение > 0 , то легко видеть, что r_t дает правильно определенную ретракцию W на $V \cup C$.

2-я ретракция: вне C определим r'_t как тождественное отображение (случай 1); внутри C движение

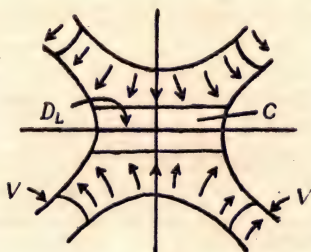


Рис. 3.3. Ретракция W к $V \cup C$.

по вертикали вдоль прямых линий к $V \cup D_L$, более медленное вблизи $V \cap C$. Точнее, для каждого $(\vec{x}, \vec{y}) \in C$ положим

$$r'_t(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} (\vec{x}, (1-t)\vec{y}) & \text{при } |\vec{x}|^2 \leq 1 \text{ (случай 2),} \\ (\vec{x}, \alpha\vec{y}) & \text{при } 1 \leq |\vec{x}|^2 \leq 1 + 1/100 \text{ (случай 3),} \end{cases}$$

где $\alpha = \alpha(\vec{x}, \vec{y}, t) = (1-t) + t((|\vec{x}|^2 - 1)/|\vec{y}|^2)^{1/2}$. Можно проверить, что r'_t остается непрерывной при $|\vec{x}|^2 \rightarrow 1$, $|\vec{y}|^2 \rightarrow 0$. Заметим, что оба определения r'_t совпадают при $|\vec{x}|^2 = 1$. На этом доказательство теоремы 3.14 закончено.

З а м е ч а н и е. Укажем вкратце, какие из доказанных выше результатов могут быть обобщены на случай более чем одной критической точки.

Пусть заданы триада $(W; V, V')$ и функция Морса $f: W \rightarrow R$ с критическими точками p_1, \dots, p_k , находящимися на одном и том же уровне, с индексами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Построив для f градиентно-подобное поле, мы

получим характеристические вложения с неперекрывающимися образами $\varphi_i: S^{\lambda_i-1} \times OD^{n-\lambda_i} \rightarrow V, i = 1, \dots, k$. Построим теперь гладкое многообразие $\omega(V; \varphi_1, \dots, \varphi_k)$ согласно следующему плану. Начнем с теоретико-множественной суммы $\left(V - \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(S^{\lambda_i-1} \times 0)\right) \times \times D^1 + L_{\lambda_1} + \dots + L_{\lambda_k}$. Для каждого $u \in S^{\lambda_i-1}, v \in S^{n-\lambda_i-1}$,

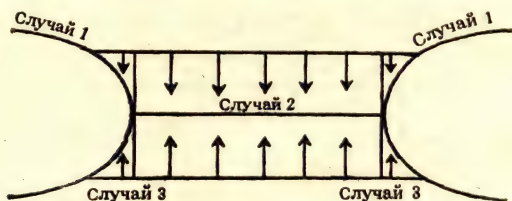


Рис. 3.4. Ретракция $V \cup C$ к $V \cup D_L$.

$0 < \theta < 1, c \in D^1$ отождествим точку $(\varphi_i(u, \theta v), c)$ в первом слагаемом с единственной точкой $(\vec{x}, \vec{y}) \in L_{\lambda_i}$, такой, что

$$1) \quad -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = c,$$

2) (\vec{x}, \vec{y}) находится на ортогональной траектории, проходящей через точку $(u \operatorname{ch} \theta, v \operatorname{sh} \theta)$.

По аналогии с теоремой 3.13 можно показать, что W диффеоморфно $\omega(V; \varphi_1, \dots, \varphi_k)$. Из этого следует, как и в 3.14, что $V \cup D_1 \cup \dots \cup D_k$ есть деформационный ретракт W , где под D_i понимается левосторонний диск точки $p_i, i = 1, \dots, k$. Наконец, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$, то группа $H_*(W, V)$ изоморфна $\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}$ (k слагаемых) в размерности λ и равна нулю в остальных размерностях. Образующие группы $H_\lambda(W, V)$ представлены дисками D_1, \dots, D_k . Эти образующие $H_\lambda(W, V)$ в действительности определяются лишь заданием функции Морса и не зависят от выбора градиентно-подобного векторного поля — см. [16].

§ 4. ПЕРЕГРУППИРОВКА КОБОРДИЗМОВ

Начиная с этого параграфа мы будем обозначать буквой c кобордизмы, а не классы эквивалентности кобордизмов, как в § 1. Если композиция cc' двух элементарных кобордизмов эквивалентна композиции dd' двух других элементарных кобордизмов (обозначим индекс точки через ind), так что

$$\begin{aligned}\text{ind}(c) &= \text{ind}(d'), \\ \text{ind}(c') &= \text{ind}(d),\end{aligned}$$

то мы будем говорить, что композиция cc' может быть *перегруппирована*. Когда это возможно?

Напомним, что на триаде $(W; V_0, V_1)$, отвечающей композиции cc' , существует функция Морса $f: W \rightarrow [0, 1]$, имеющая две критические точки p и p' , причем $\text{ind}(p) = \text{ind}(c)$, $\text{ind}(p') = \text{ind}(c')$, так что $f(p) < 1/2 < f(p')$. Если задано градиентно-подобное векторное поле ξ для f , то траектории, выходящие из p , пересекаются с $V = f^{-1}(1/2)$ по вложенной сфере S_R , называемой правосторонней сферой точки p , а траектории, ведущие в p' , пересекаются с V по вложенной сфере S'_L , называемой левосторонней сферой точки p' . Сформулируем теорему, обеспечивающую возможность перегруппировки cc' , если $S_R \cap S'_L = \emptyset$.

Теорема 4.1. (Подготовительная теорема о перегруппировке.) *Пусть имеется триада $(W; V_0, V_1)$ и ее функция Морса f с двумя критическими точками p, p' . Предположим, что при некотором выборе градиентно-подобного векторного поля ξ компактное множество K_p точек траекторий, выходящих или входящих в p , не пересекается с компактом $K_{p'}$,*

образованным траекториями, выходящими или входящими в p' . Если $f(W)=[0, 1]$ и $a, a' \in (0, 1)$, то существует новая функция Морса g , удовлетворяющая следующим условиям:

а) ξ остается градиентно-подобным полем также и для g ;

б) критическими точками g также являются точки p, p' , причем $g(p)=a, g(p')=a'$;

с) g равна f в окрестности $V_0 \cup V$ и равна $f + \text{const}$ в некоторой окрестности p и в некоторой окрестности p' . (См. рис. 4.1.)

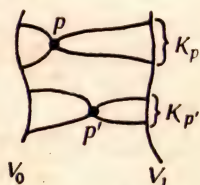


Рис. 4.1.

Доказательство. Очевидно, что все траектории, проходящие через точки, лежащие вне $K = K_p \cup K_{p'}$, идут от V_0 к V_1 . Функция $\pi: W \rightarrow K \rightarrow V_0$, сопоставляющая каждой точке на $W - K$ единственное пересечение проходящей через нее траектории с V_0 , будет, как легко видеть, гладкой (см. 3.4), и для q , близких к K , $\pi(q)$ близко к K в V_0 . Отсюда следует, что произвольная гладкая функция $\mu: V_0 \rightarrow [0, 1]$, равная нулю вблизи левосторонней сферы $K_p \cap V_0$ и единице вблизи сферы $K_{p'} \cap V_0$, единственным образом продолжается до гладкой функции $\bar{\mu}: W \rightarrow [0, 1]$, постоянной на каждой траектории, равной нулю вблизи K_p и единице вблизи $K_{p'}$.

Определим новую функцию Морса $g: W \rightarrow [0, 1]$, положив $g(q) = G(f(q), \bar{\mu}(q))$, где $G(x, y)$ — произвольная гладкая функция $G: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая следующим условиям (см. рис. 4.2):

і) для всех (x, y) $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) > 0$ и $G(x, y)$ возрастает от 0 до 1, когда x возрастает от 0 до 1;

- ii) $G(f(p), 0) = a$, $G(f(p'), 1) = a'$;
- iii) $G(x, y) = x$ для x , близких к 0 или 1, и всех y ,
 $\frac{\partial G}{\partial x}(x, 0) = 1$ для всех x в окрестности $f(p)$,
 $\frac{\partial G}{\partial x}(x, 1) = 1$ для всех x в окрестности $f(p')$.

Читатель без труда проверит, что g обладает нужными свойствами (a), (b) и (c).

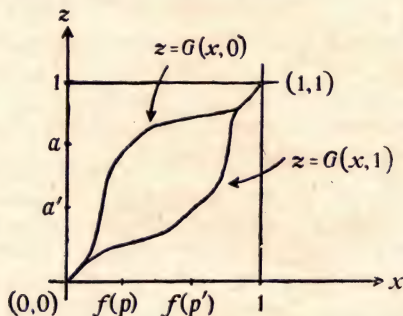


Рис. 4.2.

4.2. Обобщение. Если функция Морса f в теореме 4.1 имеет две системы критических точек $p = \{p_1, \dots, p_n\}$, $p' = \{p'_1, \dots, p'_l\}$, причем все точки p находятся на одном и том же уровне $f(p)$, а точки p' — на уровне $f(p')$, то теорема остается верной. Действительно, доказательство повторяется почти дословно.

Используя обозначения, введенные на стр. 39, положим $\lambda = \text{ind}(c)$, $\lambda' = \text{ind}(c')$ и $n = \dim W$. Если

$$\dim S_R + \dim S'_L < \dim V,$$

т. е. $(n - \lambda - 1) + (\lambda' - 1) < n - 1$ или $\lambda \geq \lambda'$, то, грубо говоря, найдется достаточно места, чтобы передвинуть S_R , не задев S'_L .

Теорема 4.3. Если $\lambda \geq \lambda'$, то возможно так изменить градиентно-подобное векторное поле для f в заранее заданной малой окрестности V , чтобы соот-

ветствующие новые сферы \bar{S}_R и \bar{S}'_L , принадлежащие V , не пересекались между собой. Вообще, если s есть кобордизм с критическими точками p_1, \dots, p_k функции f индекса λ , а s' есть кобордизм с критическими точками p'_1, \dots, p'_l функции f индекса λ' , то можно так изменить градиентно-подобное векторное поле для f в заданной малой окрестности V , чтобы соответствующие новые сферы на V не пересекались.

Определение 4.4. Открытая окрестность U подмногообразия $M^m \subset V^v$, диффеоморфная $M^m \times R^{v-m}$ и при этом так, что M^m соответствует $M^m \times 0$, называется тривиально расслоенной окрестностью M^m в V^v .

Лемма 4.5. Пусть M и N — два подмногообразия размерности m и n многообразия V размерности v . Если в V найдется тривиально расслоенная окрестность M и $m+n < v$, то существует диффеоморфизм h многообразия V на себя, гладко изотопный тождественному и такой, что $h(M)$ не пересекается с N .

Замечание. Предположение о существовании тривиально расслоенной окрестности M не является необходимым, но упрощает доказательство.

Доказательство леммы 4.5. Пусть $k: M \times R^{v-m} \rightarrow U \subset V$ есть диффеоморфизм на тривиально расслоенную окрестность $U \supset M$ в V , причем $k(M \times \vec{0}) = M$. Обозначив $N_0 = U \cap N$, рассмотрим суперпозицию отображений $g = \pi \circ k^{-1}|_{N_0}$, где под $\pi: M \times R^{v-m} \rightarrow R^{v-m}$ понимается обычная проекция.

Многообразие $k(M \times \vec{x}) \subset V$ будет пересекать N в том и только том случае, когда $\vec{x} \in g(N_0)$. Если $N_0 \neq \emptyset$, то $\dim N_0 = n < v - m$; следовательно, по теореме Сарда (см. де Рам [19, стр. 30]) $g(N_0)$ имеет меру нуль в R^{v-m} . Таким образом, мы сможем выбрать некоторую точку $\vec{u} \in R^{v-m} - g(N_0)$.

Построим диффеоморфизм V на себя, переводящий M в $k(M \times \vec{u})$ и изотопный тождественному. Можно легко построить гладкое векторное поле $\vec{\zeta}(\vec{x})$ на

R^{v-m} , обладающее тем свойством, что $\zeta(\vec{x}) = \vec{u}$ при $|\vec{x}| \leq |\vec{u}|$ и $\zeta(\vec{x}) = 0$ при $|\vec{x}| \geq 2|\vec{u}|$. Ввиду того, что носитель ζ компактен и R^{v-m} не имеет границы, интегральные кривые $\psi(t, \vec{x})$ определены для всех действительных t . (Ср. Милнор [16].) Тогда $\psi(0, \vec{x})$ является тождественным на R^{v-m} , $\psi(1, \vec{x})$ диффеоморфно отображает 0 в \vec{u} , а $\psi(t, \vec{x})$, $0 \leq t \leq 1$, является гладкой изотопией между $\psi(0, \vec{x})$ и $\psi(1, \vec{x})$.

Так как построенная изотопия тождественна вне некоторого ограниченного подмножества в R^{v-m} , то мы можем использовать ее для построения изотопии

$$h_t: V \rightarrow V,$$

полагая

$$h_t(w) = \begin{cases} k(q, \psi(t, \vec{x})) & \text{при } w \in k(q, \vec{x}) \in U, \\ w & \text{при } w \in V - U. \end{cases}$$

Тогда $h = h_1$ и будет искомым диффеоморфизмом $V \rightarrow V$.

Доказательство теоремы 4.3. Ввиду сложности обозначений мы докажем лишь первое утверждение теоремы. Общее утверждение доказывается аналогично.

Так как сфера S_R обладает в V тривиально расслоенной окрестностью (ср. с определением 3.9), то, как следует из леммы 4.5, существует диффеоморфизм $h: V \rightarrow V$, гладко изотопный тождественному и такой, что $h(S_R) \cap S_L = \emptyset$. Эта изотопия следующим образом используется для изменения ξ .

Пусть $a < 1/2$ достаточно велико, так что $f^{-1}[a, 1/2]$ лежит в заранее выбранной окрестности V . Интегральные кривые поля $\xi = \xi/\xi(f)$ определяют диффеоморфизм

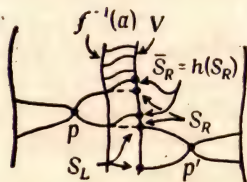
$$\varphi: [a, 1/2] \times V \rightarrow f^{-1}[a, 1/2],$$

такой, что $f(\varphi(t, q)) = t$, $\varphi(1/2, q) = q \in V$. Определим диффеоморфизм H многообразия $[a, 1/2] \times V$ на себя, положив $H(t, q) = (t, h_t(q))$, где $h_t(q)$ определяет

гладкую изотопию $[a, 1/2] \times V \rightarrow V$ между тождественным отображением и отображением h , причем такую, что h_t тождественно для всех t , близких к a , и $h_t = h$ при t , близких к $1/2$. Тогда легко проверяется, что векторное поле

$$\xi' = (\varphi \circ H \circ \varphi^{-1})_* \xi,$$

определенное на $f^{-1}[a, 1/2]$, является гладким, совпадает с ξ вблизи $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(1/2) = V$ и тождественно



Р и с. 4.3.

удовлетворяет равенству $\xi'(f) = 1$. Таким образом, векторное поле ξ на W , совпадающее с $\xi(f)\xi'$ на $f^{-1}[a, 1/2]$ и всюду вне $f^{-1}[a, 1/2]$ равное ξ , является новым гладким градиентно-подобным полем для f .

Теперь $\varphi(t, h_t(q))$ описывает для каждого фиксированного $q \in V$ некоторую интегральную кривую поля ξ , проходящую через $\varphi(a, q)$ на $f^{-1}(a)$ к $\varphi(1/2, h(q)) = h(q)$ на $f^{-1}(1/2) = V$. Отсюда следует, что правосторонняя сфера $\varphi(a \times S_R)$ точки p на $f^{-1}(a)$ переводится в $h(S_R)$ на V . Таким образом, $h(S_R)$ является новой правосторонней сферой \bar{S}_R точки p . Ясно, что $\bar{S}_L = S_L$. Итак, как и требовалось, $\bar{S}_R \cap \bar{S}_L = h(S_R) \cap S_L = \emptyset$. Доказательство теоремы закончено.

Приведенные выше рассуждения доказывают следующую лемму, часто используемую в дальнейших рассуждениях.

Лемма 4.6. Пусть даны триада $(W; V_0, V_1)$ и функция Морса f на ней с градиентно-подобным векторным полем ξ , подмногообразие уровня $V = f^{-1}(b)$, не содержащее критических точек, а также диффеоморфизм $h: V \rightarrow V$, изотопный тождественному. Если $f^{-1}[a, b]$, $a < b$, также не содержит критических точек,

то можно построить новое градиентно-подобное векторное поле ξ для f , такое, что:

- а) ξ совпадает с ξ вне $f^{-1}(a, b)$,
- б) $\bar{\varphi} = h \circ \varphi$, где φ и $\bar{\varphi}$ суть диффеоморфизмы $f^{-1}(a) \rightarrow V$, определяемые с помощью продолженных из $f^{-1}(a)$ на V траекторий векторных полей ξ и $\bar{\xi}$ соответственно.

Заменяя f на $-f$, мы получим аналогичное утверждение, в котором ξ изменяется на $f^{-1}(b, c)$, $b < c$, т. е. на окрестности, лежащей справа, а не слева от V .

Напомним, что любой кобордизм c может быть представлен в виде композиции конечного числа элементарных кобордизмов (следствие 2.11). Пользуясь подготовительной теоремой о перегруппировке 4.1, теоремой 4.2 в сочетании с теоремой 4.3, мы получим следующую теорему:

Теорема 4.7. (Заключительная теорема о перегруппировке.) *Произвольный кобордизм c допускает представление в виде композиции кобордизмов:*

$$c = c_0 c_1 \dots c_n, \quad n = \dim c,$$

где каждому из кобордизмов c_k отвечает некоторая функция Морса f_k с единственным критическим значением и критическими точками одного и того же индекса k .

Двойственный вариант теоремы 4.7. Справедливо следующее утверждение относительно функций Морса, не использующее понятия кобордизма.

Пусть дана триада $(W; V_0, V_1)$ и ее функция Морса; тогда существует новая функция Морса f , имеющая те же критические точки того же индекса и обладающая следующими двумя свойствами:

- 1) $f(V_0) = -1/2$, $f(V_1) = n + 1/2$,
- 2) $f(p) = \text{ind}(p)$ для каждой критической точки p функции f .

Определение 4.8. Такая функция Морса будет называться *функцией с внутренней индексацией (или различающей функцией)*.

Теорема 4.7 принадлежит Смейлу [25] и Уоллесу [36].

§ 5. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОМ УНИЧТОЖЕНИИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

В связи с заключительной теоремой о перегруппировке естественно возникает новый вопрос. Когда композиция ss' элементарного кобордизма с индекса λ и элементарного кобордизма s' индекса $\lambda+1$ эквивалентна тривиальному кобордизму? На рис. 5.1 изображено, как это может произойти в размерности 2.



Рис. 5.1.

Пусть функция Морса f триады $(W^n; V_0, V_1)$, соответствующей ss' , имеет две критические точки p, p' индексов $\lambda, \lambda+1$, так что $f(p) <^{1/2} f(p')$. Градиентно-подобное векторное поле ξ для f определяет на $V = f^{-1}(^{1/2})$ правостороннюю сферу S_R точки p и левостороннюю сферу S'_L точки p' . Отметим, что $\dim S_R + \dim S'_L = (n - \lambda - 1) + \lambda = n - 1 = \dim V$.

Определение 5.1. Два подмногообразия $M^m, N^n \subset V^v$ имеют *трансверсальное пересечение* (или, короче, *трансверсальны*), если во всякой точке $q \in M \cap N$ касательное пространство к V в q порождается векторами, касательными к M и N . (Когда $m+n < v$ и это условие не может быть выполнено, под трансверсальным пересечением понимается просто равенство $M \cap N = \emptyset$.)

Следующий результат является подготовительным к основной теореме 5.4:

Теорема 5.2. *Градиентно-подобное векторное поле ξ может быть выбрано таким образом, чтобы S_R и S'_L пересекались в V трансверсально.*

При доказательстве теоремы будет использована лемма, в формулировке которой используются обозначения определения 5.1.

Лемма 5.3. *Если M допускает тривиально расслоенную окрестность в V , то найдется диффеоморфизм h многообразия V на себя, гладко изотопный тождественному и такой, что $h(M)$ и N пересекаются трансверсально.*

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что лемма 4.5 является следствием этой леммы, доказываемой по существу точно так же. Предположение о существовании тривиально расслоенной окрестности M в действительности не является необходимым.

Доказательство. Как и в лемме 4.5, пусть диффеоморфизм $k: M \times R^{v-m} \rightarrow U \subset V$ является отображением на тривиально расслоенную окрестность $U \supset M$ в V , причем $k(M \times \vec{0}) = M$. Пусть $N_0 = U \cap N$; рассмотрим суперпозицию отображений $g = \pi \circ k^{-1}|_{N_0}$, где под $\pi: M \times R^{v-m} \rightarrow R^{v-m}$ понимается обычная проекция.

Многообразие $k(M \times \vec{x})$ не будет иметь трансверсального пересечения с N в том и только том случае, когда $\vec{x} \in R^{v-m}$ будет образом при отображении g некоторой критической точки $q \in N_0$, в которой g не имеет максимального ранга $v - m$. Но в силу теоремы Сарда (см. Милнор [14, стр. 10] и де Рам [19, стр. 30]) образ $g(C)$ множества $C \subset N_0$ всех критических точек g имеет меру нуль в R^{v-m} . Следовательно, мы можем выбрать точку $\vec{u} \in R^{v-m} - g(C)$ и, как и в лемме 4.5, построить изотопию между тождественным отображением и диффеоморфизмом h многообразия V на себя

так, чтобы эта изотопия переводила M в $k(M \times \vec{u})$. Поскольку $k(M \times \vec{u})$ и N трансверсальны, доказательство закончено.

Доказательство теоремы 5.2. Предыдущая лемма обеспечивает существование диффеоморфизма $h: V \rightarrow V$, гладко изотопного тождественному и такого, что $h(S_R)$ и S'_L трансверсальны. Используя лемму 4.7, мы можем так изменить градиентно-подобное поле ξ , чтобы новой правосторонней сферой был образ $h(S_R)$, а левосторонняя сфера не изменилась. Доказательство закончено.

В оставшейся части § 5 мы предполагаем, что S_R и S'_L имеют трансверсальное пересечение. Ввиду того, что $\dim S_R + \dim S'_L = \dim V$, это пересечение состоит из конечного числа изолированных точек. Действительно, из включения $q_0 \in S_R \cap S'_L$ следует, что в некоторой окрестности U точки q_0 в V существуют локальные координатные функции $x_1(q), \dots, x_{n-1}(q)$, такие, что $x_i(q_0) = 0, i = 1, \dots, n-1$, и $U \cap S_R$ описывается уравнениями $x_1(q) = \dots = x_\lambda(q) = 0$, а $U \cap S'_L$ — уравнениями $x_{\lambda+1}(q) = \dots = x_{n-1}(q) = 0$. Очевидно, что единственной точкой пересечения $S_R \cap S'_L \cap U$ будет q_0 . Из этого замечания следует, что существует лишь конечное число траекторий, идущих из p в p' по одной через каждую точку $S_R \cap S'_L$.

По-прежнему используя обозначения, введенные на стр. 46, сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорема 5.4. (Первая теорема о взаимном уничтожении критических точек.) *Если пересечение S_R и S'_L трансверсально и состоит из единственной точки, то кобордизм является тривиальным. А именно, можно так изменить градиентно-подобное векторное поле ξ в произвольно малой окрестности единственной траектории T , идущей из p в p' , чтобы полученное поле ξ' нигде не обращалось в нуль и чтобы все траектории этого поля начинались в V_0 и*

заканчивались в V_1 . Это поле ξ' будет градиентно-подобным полем некоторой функции Морса f' , не имеющей критических точек и совпадающей с f в некоторой окрестности границы $V_0 \cup V_1$. (См. рис. 5.2.)

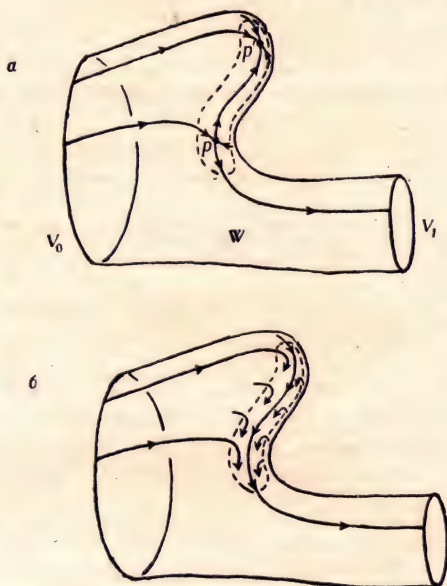


Рис. 5.2. а — до изменения; б — после изменения.

Замечание. Доказательство принадлежит М. Морсу [17], [37] и весьма внушительно. Исключая техническую теорему 5.6, оно занимает около 10 последующих страниц.

Вначале мы докажем эту теорему при некотором дополнительном предположении относительно поведения поля ξ вблизи T .

Предварительное предположение 5.5. Существует окрестность U_T траектории T , ведущей из p в p' , и координатное отображение $g: U_T \rightarrow R^n$, такие, что:

1) p и p' соответствуют точкам $(0, \dots, 0)$ и $(1, 0, \dots, 0)$ в R^n ;

$$2) \ g_* \xi(q) = \vec{\eta}(\vec{x}) = (v(x_1), -x_2, \dots, -x_\lambda, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n),$$

где $g(q) = x$ и где

3) $v(x_1)$ есть гладкая функция x_1 , положительная на $(0, 1)$, равная нулю в 0 и 1 и отрицательная вне $[0, 1]$; кроме того, $|\partial v / \partial x_1| = 1$ вблизи $x_1 = 0, 1$.

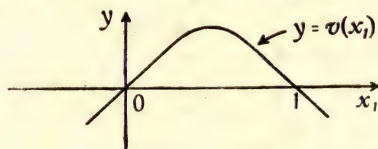


Рис. 5.3.

Утверждение 1. Для любой открытой окрестности U траектории T найдется меньшая окрестность $U' \subset U$ траектории T , такая, что всякая траектория, начинающаяся в U' и выходящая за пределы U , не возвращается в U' .

Доказательство. Если это неверно, то существует некоторая последовательность отрезков траекторий $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$, таких, что T_k начинается в r_k , проходит через точку s_k вне U и оканчивается в t_k , причем обе последовательности $\{r_k\}$ и $\{t_k\}$ приближаются к T . Ввиду компактности $W - U$ можно предполагать, что $\lim s_k = s \in W - U$. Интегральная кривая $\psi(t, s)$, проходящая через точку s , должна либо начинаться в V_0 , либо заканчиваться в V_1 , либо обладать и первым, и вторым свойством, в противном случае она была бы второй траекторией, связывающей p и p' . Предположим для определенности, что она выходит из V_0 . Тогда, используя непрерывную зависимость $\psi(t, s')$ от начального значения s' , мы получим, что все траектории, проходящие через точки, лежащие вблизи s , начинаются на V_0 . Часть траектории $T_{s'}$ от V_0 до точки s' , находящейся вблизи от s , компактна; следовательно, наименьшее расстояние $d(s')$ между T и $T_{s'}$

(в любой метрике) непрерывно зависит от s' и ограничено снизу положительным числом для всех s' в некоторой окрестности s . В силу того, что $r_k \in T_{s_k}$, точки r_k не могут приближаться к T при $k \rightarrow \infty$, что приводит к противоречию.

Предположим, что U — некоторая окрестность T , такая, что $\bar{U} \subset U_T$, и пусть U' есть «гарантирующая» окрестность, $T \subset U' \subset U$, существование которой доказано в утверждении 1.

Утверждение 2. Можно так изменить поле ξ на компактном подмножестве U' , чтобы полученное векторное поле ξ' нигде не обращалось в нуль и чтобы

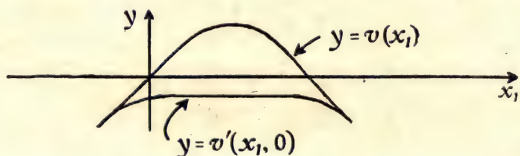


Рис. 5.4.

всякая интегральная кривая поля ξ' , проходящая через некоторую точку окрестности U в момент времени $t=0$, в какой-то момент времени $t' < 0$ была вне U и в какой-то другой момент $t'' > 0$ была снова вне U .

Доказательство. Мы заменим $\vec{\eta}(\vec{x}) = (v(x_1), -x_2, \dots, x_n)$ гладким векторным полем $\vec{\eta}'(\vec{x}) = (v'(x_1, \rho), -x_2, \dots, x_n)$, где $\rho = [x_2^2 + \dots + x_n^2]^{1/2}$ и

i) $v'(x_1, \rho(\vec{x})) = v(x_1)$ вне компактной окрестности $g(T)$ в $g(U')$,

ii) $v'(x_1, 0)$ всюду отрицательна. (См. рис. 5.4.)

Эти формулы определяют в W нигде не равное нулю векторное поле ξ' . В наших локальных координатах дифференциальные уравнения интегральных кривых поля ξ' в U_T имеют такой вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = v'(x_1, \rho), \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2, \dots, \quad \frac{dx_{\lambda+1}}{dt} = -x_{\lambda+1},$$

$$\frac{dx_{\lambda+2}}{dt} = x_{\lambda+2}, \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = x_n.$$

Рассмотрим поведение интегральной кривой $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ с начальным значением (x_1^0, \dots, x_n^0) при возрастании t .

а) Если одно из чисел $x_{\lambda+2}^0, \dots, x_n^0$ не равно нулю, например $x_n^0 \neq 0$, то $|x_n(t)| = |x_n^0 e^t|$ экспоненциально растёт и $\vec{x}(t)$ в конце концов покинет $g(U)$ ($g(\bar{U})$ компактно и, следовательно, ограничено).

б) Если $x_{\lambda+2}^0 = \dots = x_n^0 = 0$, то $\rho(\vec{x}(t)) = [(x_2^0)^2 + \dots + (x_{\lambda+1}^0)^2]^{1/2} \cdot e^{-t}$ экспоненциально убывает. Предположим теперь, что $\vec{x}(t)$ остаётся в $g(U)$. Поскольку $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ отрицательно на x_1 -оси, существует настолько малое $\delta > 0$, что $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ отрицательно на компакте $K_\delta = \{\vec{x} \in g(\bar{U}) \mid \rho(\vec{x}) \leq \delta\}$. Тогда $v'(x_1, \rho(\vec{x}))$ имеет на K_δ отрицательную верхнюю границу $-\alpha < 0$. В конце концов $\rho(\vec{x}(t))$ станет не больше δ и потому

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \leq -\alpha.$$

Таким образом, $\vec{x}(t)$ должно в какой-то момент времени выйти за пределы ограниченного множества $g(U)$.

Аналогичные рассуждения показывают, что $\vec{x}(t)$ выйдет за пределы $g(U)$ и при убывании t .

Утверждение 3. Все траектории векторного поля ξ' начинаются на V_0 и оканчиваются на V_1 .

Доказательство. Согласно утверждению 2, всякая интегральная кривая поля ξ' , находящаяся в какой-то момент времени в U' , в конце концов выходит за пределы U . Но выходя за пределы U' , эта кривая совпадает с некоторой траекторией поля ξ ; таким образом, согласно утверждению 1, оказавшись вне U , она навсегда останется вне U' . Следовательно, такая кривая должна прийти в V_1 , следуя вдоль некоторой траектории поля ξ . Аналогичное рассуждение показывает, что эта кривая выходит из V_0 . С другой стороны, всякая интегральная кривая поля ξ' , не проходящая

через U' , является интегральной кривой поля ξ и идет из V_0 в V_1 .

Утверждение 4. *Векторное поле ξ' естественным образом определяет некоторый диффеоморфизм*

$$\varphi: ([0, 1] \times V_0; 0 \times V_0, 1 \times V_0) \rightarrow (W; V_0, V_1).$$

Доказательство. Пусть $\psi(t, q)$ — семейство интегральных кривых поля ξ' . Ввиду того, что ξ' нигде не касается dW , из теоремы о неявной функции получим, что функция $\tau_1(q)$ (соответственно $\tau_0(q)$), сопоставляющая каждой точке $q \in W$ момент времени, в который $\psi(t, q)$ достигает V_1 (соответственно момент времени достижения V_0 , взятый с противоположным знаком), является гладкой по q . Отсюда следует, что и проекция $\pi: W \rightarrow V_0$, определенная согласно формуле $\pi(q) = \psi(-\tau_0(q), q)$, также является гладкой. Ясно, что гладкому векторному полю $\tau_1(\pi(q))\xi'(q)$ соответствуют интегральные кривые, проходящие из V_0 в V_1 за единицу времени. Чтобы упростить обозначения, предположим, что само поле ξ' уже обладает этим свойством. Тогда искомый диффеоморфизм φ задается формулой

$$(t, q_0) \rightarrow \psi(t, q_0),$$

а гладкое отображение, обратное к φ , — формулой

$$q \rightarrow (\tau_0(q), \pi(q)).$$

Утверждение 5. *Векторное поле ξ' является градиентно-подобным для некоторой функции Морса g на W (без критических точек), совпадающей с f в окрестности $V_0 \cup V_1$.*

Доказательство. Согласно утверждению 4, достаточно показать, что существует функция Морса $g: [0, 1] \times V_0 \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая неравенству $\frac{\partial g}{\partial t} > 0$ и совпадающая с $f_1 = f \circ \varphi$ вблизи $0 \times V_0 \cup 1 \times V_0$ (мы можем предполагать, что $V_0 = f^{-1}(0)$, $V_1 = f^{-1}(1)$). Очевидно, найдется такое $\delta > 0$, что для всех $q \in V_0$ $\frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) > 0$ при $t < \delta$ или $t > 1 - \delta$. Пусть $\lambda: [0, 1] \rightarrow$

$\rightarrow [0, 1]$ — некоторая гладкая функция, равная 0 при $t \in [\delta, 1 - \delta]$ и 1 вблизи 0 и 1. Рассмотрим функцию

$$g(u, q) = \int_0^u \left\{ \lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) + [1 - \lambda(t)] k(q) \right\} dt,$$

где

$$k(q) = \left\{ 1 - \int_0^1 \lambda(t) \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, q) dt \right\} / \int_0^1 [1 - \lambda(t)] dt.$$

Выбрав δ достаточно малым, мы можем считать, что $k(q) > 0$ для всех $q \in V_0$. Тогда, очевидно, g удовлетворяет требуемым условиям.

Предполагая предварительное предположение справедливым, мы можем считать первую теорему о взаимном уничтожении критических точек доказанной. Таким образом, нам осталось доказать следующее

Утверждение 6. *Если пересечение S_R и S'_L трансверсально и состоит из одной точки, то всегда можно так подобрать новое градиентно-подобное векторное поле ξ' , чтобы выполнялись все условия предположения 5.5.*

Замечание. Довольно длинное доказательство состоит из двух частей — редукции проблемы к технической лемме (теорема 5.6) и доказательства леммы.

Доказательство. Пусть $\vec{\eta}(\vec{x})$ — некоторое векторное поле на R^n того же вида, что и описанное в предварительном предположении, имеющее, в частности, особенности в начале координат и единичной точке e оси x_1 . Функция

$$F(\vec{x}) = f(p) + 2 \int_0^{x_1} v(t) dt - x_1^2 - \dots - x_{\lambda+1}^2 + x_{\lambda+2}^2 + \dots + x_n^2$$

является функцией Морса на R^n , для которой $\vec{\eta}(\vec{x})$ есть градиентно-подобное векторное поле. Надлежащим выбором функции $v(x_1)$ мы добьемся выполнения

$$\text{равенства } F(e) = f(p'), \text{ т. е. } 2 \int_0^1 v(t) dt = f(p') - f(p).$$

Напомним, что, согласно определению 3.1 градиентно-подобного векторного поля для \vec{f} , в некоторой окрестности каждой из двух критических точек p и p' существует координатная система (x_1, \dots, x_n) , в которой \vec{f} равна функции $\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2$ соответствующего индекса, а ξ имеет координаты $(\pm x_1, \dots, \pm x_n)$.

Без труда проверяется, что в таком случае существуют числа b_1 и b_2 , $a_1 = f(p) < b_1 < b_2 < f(p') = a_2$, и диффеоморфизмы g_1, g_2 замкнутых непересекающихся окрестностей L_1, L_2 точек 0 и e соответственно на окрестности точек p и p' соответственно, причем выполнены следующие условия:

а) Диффеоморфизм переводит $\vec{\eta}$ в $\vec{\xi}$, F в f и точки отрезка oe в точки T .

б) Обозначим через p_i пересечение $T \cap f^{-1}(b_i)$, $i=1, 2$. Образ L_1 является окрестностью отрезка $pp_1 \subset T$ в $f^{-1}[a_1, b_1]$, в то время как образ L_2 является окрестностью отрезка $p_2p' \subset T$ в $f^{-1}[b_2, a_2]$ (см. рис. 5.5).

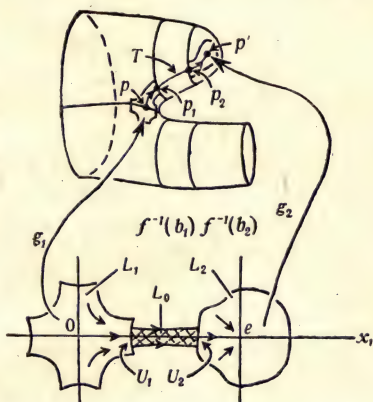


Рис. 5.5.

Заметим, что отрезки траектории поля $\vec{\eta}(x)$ с начальными значениями в малой окрестности U_1 точки $g_1^{-1}(p_1)$ в $g_1^{-1}f^{-1}(b_1)$ оканчиваются в точках множества $g_2^{-1}f^{-1}(b_2)$ и образуют там диффеоморфный образ U_2 окрестности U_1 , а сами траектории замечают некоторое множество L_0 , диффеоморфное $U_1 \times [0, 1]$, так что $L_1 \cup L_0 \cup L_2$ является окрестностью сегмента oe . Существует единственное продолжение g_1 до гладкого вложения $\vec{g}_1: L_1 \cup L_0 \rightarrow W$, определяемое условием перехода $\vec{\eta}$ -траекторий в $\vec{\xi}$ -траектории и F -уровней в f -уровни.

Допустим теперь на время, что два вложения U_2 в $f^{-1}(b_2)$, т. е. \bar{g}_1 и g_2 , совпадают хотя бы в малой окрестности $g_2^{-1}(p_2)$ в U_2 . Тогда оба отображения \bar{g}_1 и g_2 дают сохраняющий траектории и уровни диффеоморфизм \bar{g} малой окрестности \bar{V} сегмента oe на некоторую окрестность $\bar{T} \subset W$. Отсюда следует, что на $\bar{g}(V)$ определена гладкая вещественная положительная функция k , такая, что всюду на $\bar{g}(V)$

$$\bar{g}_* \overset{\rightarrow}{\eta} = k\xi.$$

Выбрав окрестность $\bar{V} \supset oe$ достаточно малой, мы можем считать, что гладкая и положительная функция k определена на всем W . Тогда векторное поле $\xi' = k\xi$ является градиентно-подобным и удовлетворяет условиям предварительного предположения 5.5. Таким образом, если сделанные выше предположения выполнены, то доказательство утверждения 6 закончено.

В общем случае векторное поле ξ индуцирует диффеоморфизм $h: f^{-1}(b_1) \rightarrow f^{-1}(b_2)$, а векторное поле $\overset{\rightarrow}{\eta}$ — диффеоморфизм $h': U_1 \rightarrow U_2$. Очевидно, что предположения предыдущего параграфа выполняются в том и только том случае, когда h и $h_0 = g_2 h' g_1^{-1}$ совпадают вблизи p_1 . Однако по лемме 4.6 всякий диффеоморфизм, изотопный h , порожден некоторым новым градиентно-подобным векторным полем, не совпадающим с ξ только на множестве $f^{-1}(b_1, b_2)$. Таким образом, утверждение 6 будет доказано, если H можно продеформировать в диффеоморфизм \bar{h} , совпадающий с h_0 вблизи p_1 и такой, что новая правосторонняя сфера $\bar{h}(S_R(b_1))$ уровня b_2 и сфера $S'_L(b_2)$ по-прежнему пересекаются трансверсально в единственной точке p_2 . (Через b_1 и b_2 обозначены множества уровней, на которых расположены эти сферы.)

Для удобства мы зададим требуемую деформацию диффеоморфизма h , построив соответствующую изотопию между отображением $h_0^{-1}h$, заданным в малой окрестности точки p_1 , и тождественным отображением еще меньшей окрестности p_1 на себя. Отметим, что отображение $h_0^{-1}h$ (если потребуется, то после предварительных изменений g_2) сохраняет ориента-

цию в точке $p_1 = h_0^{-1}h(p_1)$ и обе сферы $h_0^{-1}hS_R(b_1)$ и $S_R(b_1)$ должны иметь в точке p_1 одинаковый индекс пересечения со сферой $S_L(b_1)$ (а именно $+1$ или -1). (По поводу определения индекса пересечения см. § 6.) Тогда существование требуемой изотопии вытекает из следующей локальной теоремы.

Пусть $n = a + b$. Для точки $x \in R^n$ можно использовать обозначение $x = (u, v)$, $u \in R^a$, $v \in R^b$. Мы будем отождествлять $u \in R^a$ с $(u, 0) \in R^n$ и $v \in R^b$ с $(0, v) \in R^n$.

Теорема 5.6. Пусть $h: R^n \rightarrow R^n$ есть сохраняющее ориентацию вложение, такое, что

1) $h(0) = 0$ (через 0 обозначено начало координат в R^n);

2) $h(R^a)$ и R^b пересекаются лишь в начале координат; пересечение является трансверсальным, и индекс пересечения равен $+1$ (где по определению индекс пересечения R^a и R^b равен $+1$).

Тогда для любой окрестности N начала координат существует гладкая изотопия $h'_t: R^n \rightarrow R^n$, $0 \leq t \leq 1$, где $h'_0 = h$, такая, что:

I) $h'_t(x) = h(x)$ для $x = 0$ и $x \in R^n - N$, $0 \leq t \leq 1$;

II) $h'_1(x) = x$ для всех x из некоторой малой окрестности N_1 начала координат;

III) $h'_1(R^a) \cap R^b = 0$.

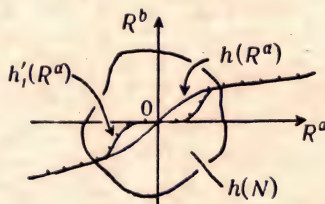


Рис. 5.6.

Лемма 5.7. Пусть $h: R^n \rightarrow R^n$ есть отображение теоремы 5.6. Тогда существует гладкая изотопия $h_t: R^n \rightarrow R^n$, $0 \leq t \leq 1$, такая, что:

i) $h_0 = h$ и h_1 — тождественное отображение R^n ;

ii) для каждого $t \in [0, 1]$, $h_t(R^a) \cap R^b = 0$ и пересечение трансверсально.

Доказательство леммы 5.7. Ввиду того, что $h(0) = 0$, запишем $h(x)$ в виде $h(x) = x_1 h^1(x) + \dots + x_n h^n(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $h^i(x)$ — гладкая вектор-функция x и (следовательно) $h^i(0) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(0)$, $i = 1, \dots, n$ (см. Милнор [16]). Если мы определим h_t , положив

$$h_{1-t}(x) = \frac{1}{t} h(tx) = x_1 h^1(tx) + \dots + x_n h^n(tx), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

то очевидно, что h_t есть гладкая изотопия между h и линейным отображением

$$h_1(x) = x_1 h^1(0) + \dots + x_n h^n(0).$$

Многообразия $h(R^a)$ и $h_1(R^a)$ имеют общий ориентированный базис $h^1(0), \dots, h^n(0)$ касательных векторов в $0 \in R^n$, откуда следует, что для всех t , $0 \leq t \leq 1$, $h_t(R^a)$ имеет трансверсальное положительное пересечение с R^b в 0. Очевидно, $h_t(R^a) \cap R^b = 0$. Таким образом, если h_1 — тождественное линейное отображение, то лемма доказана.

Если же это не так, то рассмотрим семейство $\Lambda \subset GL(n, R)$ всех невырожденных и сохраняющих ориентацию линейных преобразований L пространства R^n , таких, что $L(R^a)$ имеет трансверсальное положительное пересечение с R^b , т. е. всех преобразований с матрицей вида $L = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline * & * \end{array} \right)$, где A — квадратная матрица порядка a и $\det L > 0$, $\det A > 0$.

Утверждение. Для произвольного $L \in \Lambda$ найдется гладкая изотопия L_t , $0 \leq t \leq 1$, переводящая L в тождественное преобразование и такая, что $L_t \in \Lambda$ для всех t ; иными словами, в Λ существует гладкий путь, соединяющий L и тождественное преобразование.

Доказательство. Очевидно, что прибавление к одной из последних b строк (столбцов) одной из первых a строк (соответственно столбцов), умножен-

ной на скалярный множитель, можно реализовать с помощью гладкой деформации (пути) в Λ . С помощью конечного числа таких операций матрица L может быть приведена к виду

$$L' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right),$$

где B — квадратная матрица $b \times b$ и (необходимо) $\det B > 0$. Хорошо известно, что посредством конечного числа операций, реализуемых деформациями в $GL(a, R)$, матрица A может быть приведена к единичной матрице. То же верно и для B . Таким образом, найдутся гладкие деформации $A_t, B_t, 0 \leq t \leq 1$, матриц A и B соответственно к единичным матрицам, причем $\det A_t > 0, \det B_t > 0$. Они и обеспечат гладкую деформацию L' в Λ к тождественному преобразованию. На этом доказательство предложения, а вместе с ним и леммы 5.7 закончено.

Доказательство теоремы 5.6. Пусть $h_t, 0 \leq t \leq 1$, есть изотопия леммы 5.7. Пусть $E \subset N$ — открытый шар с центром в 0 и d — расстояние от 0 до $R^n - h(E)$. Ввиду того, что $h_t(0) = 0$ и временной интервал $0 \leq t \leq 1$ компактен, найдется малый открытый шар E_1 с центром в 0, такой, что $\bar{E}_1 \subset E$ и для всех $x \in \bar{E}_1$ выполняется неравенство $|h_t(x)| < d$. Определим теперь

$$\bar{h}_t(x) = \begin{cases} h_t(x) & \text{для } x \in \bar{E}_1, \\ h(x) & \text{для } x \in R^n - E. \end{cases}$$

По определению \bar{h}_t есть изотопия $h|_{\bar{E}_1 \cup (R^n - E)}$. Начнем с того, что продолжим \bar{h}_t до изотопии \bar{h} , удовлетворяющей по крайней мере условиям I) и II) теоремы 5.6.

Заметим сначала, что *любой* изотопии $h_t, 0 \leq t \leq 1$, отображения h соответствует гладкое вложение, сохраняющее уровни

$$H: [0, 1] \times R^n \rightarrow [0, 1] \times R^n,$$

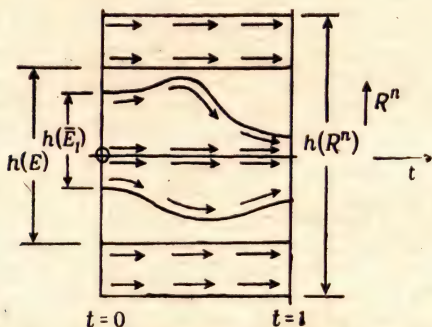
и наоборот. Справедливо простое соотношение

$$H(t, x) = (t, h_t(x)).$$

Вложение H определяет на своем образе векторное поле

$$\vec{\tau}(t, y) = H(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \left(1, \frac{\partial h_t(x)}{\partial t}\right),$$

где $(t, y) = H(t, x)$, т. е. $y = h_t(x)$. Это векторное поле вместе с вложением h_0 полностью определяет h_t , а, следовательно, и H . Действительно, $\psi(t, y) = (t, h_t h_0^{-1}(y))$ определяет единственное семейство интегральных кривых с начальными значениями $(0, y) \in 0 \times h_0(R^n)$



Р и с. 5.7. Векторное поле $\vec{\tau}(t, y)$.

Эти замечания легли в основу схемы доказательства, предложенного Р. Томом. Мы распространим изотопию \bar{h}_t на все пространство $[0, 1] \times R^n$, продолжив сначала векторное поле

$$\vec{\tau}(t, y) = \left(1, \frac{\partial \bar{h}_t}{\partial t}(h_t^{-1}(y))\right)$$

до векторного поля вида $(1, \vec{\xi}(t, y))$ на всем $[0, 1] \times R^n$. Очевидно, \bar{h}_t допускает продолжение на малую открытую окрестность замкнутой области $[0, 1] \times \{\bar{E}_1 \cup (R^n - E)\}$. Это дает продолжение $\vec{\tau}(t, y)$ на некоторую окрестность U замкнутого носителя τ . После умножения на гладкую функцию, равную тождественно 1 на первоначальной замкнутой области и

0 вне U , мы получим продолжение на $[0, 1] \times R^n$. Наконец, положив первую координату равной 1, получим гладкое продолжение

$$\vec{\tau}'(t, y) = (1, \vec{\xi}(t, y)).$$

Заметим, что семейство интегральных кривых $\psi(t, y)$ определено для $y \in R^n$ и всех $t \in [0, 1]$. Для $y \in R^n - h(E)$ это тривиально. Для $y \in h(E)$ это следует из того факта, что интегральная кривая должна оставаться в компактном множестве $[0, 1] \times h(\bar{E})$. Семейство ψ порождает гладкое сохраняющее уровни вложение

$$\psi: [0, 1] \times R^n \rightarrow [0, 1] \times R^n.$$

Тогда уравнение

$$\psi(t, y) = (t, \bar{h}_t h^{-1}(y))$$

определяет искомое продолжение \bar{h}_t до гладкой изотопии диффеоморфизма h и удовлетворяет по крайней мере условиям I) и II) теоремы 5.6.

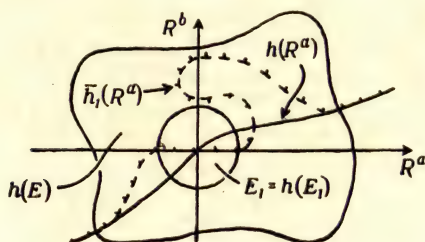
С помощью аналогичных рассуждений можно доказать следующую теорему Р. Тома, которая будет использована нами в § 8. (Полное доказательство изложено у Милнора [12] и Тома [29].)

Теорема 5.8. (Теорема о продолжении изотопии.) Пусть M — гладкое компактное подмногообразие гладкого многообразия N без края. Если h_t , $0 \leq t \leq 1$, есть гладкая изотопия отображения $i: M \subset N$, то она является сужением на M гладкой изотопии h'_t , $0 \leq t \leq 1$, тождественного отображения $N \rightarrow N$, такой, что отображение h'_t является тождественным вне некоторого компактного подмножества многообразия N .

Вернемся к доказательству теоремы 5.6. Пусть \bar{h}_t — продолженная изотопия. Условие III) теоремы 5.6 будет нарушено, если \bar{h}_t порождает новые пересечения образа R^a с R^b , как показано на рис. 5.8.

Таким образом, мы можем использовать \bar{h}_t только для малых значений t , например $t \leq t'$, пока не воз-

никает новых пересечений. Мы применим описанный выше процесс для построения дальнейших деформаций \bar{h}_t , изменяющих \bar{h}_t только в точках E_1 , где \bar{h}_t совпадает с h_t . После конечного числа шагов мы получим искомую изотопию. Переходим к детальному построению.



Р и с. 5.8

Заметим, что изотопию h_t леммы 5.7 можно записать в виде

$$h_t(x) = x_1 h^1(t, x) + \dots + x_n h^n(t, x), \quad (*)$$

где $h^i(t, x)$ — гладкая функция t и x , $i=1, \dots, n$, и (следовательно) $h^i(t, 0) = \frac{\partial h_t}{\partial x_i}(0)$. (Доказательство, приведенное у Милнора [16], остается верным и в случае, если h зависит от параметра t .)

Лемма 5.9. *Найдутся положительные постоянные K и k , такие, что для всех x из некоторой окрестности начала координат в R^n и всех $t \in [0, 1]$*

- 1) $\left| \frac{\partial h_t(x)}{\partial t} \right| < K|x|$,
- 2) $|\pi_a h_t(x)| > k|x|$ для всех x , принадлежащих R^a , где $\pi_a: R^n \rightarrow R^a$ есть проекция.

Доказательство. Первое неравенство получается после дифференцирования (*). Второе следует из трансверсальности $h_t(R^a)$ и R^b для всех t на компактном отрезке $[0, 1]$.

Мы закончим доказательство теоремы 5.6 описанием индуктивного шага. Предположим, что мы каким-то образом получили вложение $\tilde{h}: R^n \rightarrow R^n$, изотопное h и такое, что

1) для некоторого t_0 , $0 \leq t_0 \leq 1$, $\tilde{h}(x)$ совпадает с $h_{t_0}(x)$ для всех x , близких к 0, и с $h(x)$ для всех x вне N ;

2) $\tilde{h}(R^a) \cap R^b = 0$.

Мы построим \bar{h}_t так, как это описано на стр. 59—61, взяв вместо h вложение \tilde{h} и вместо $[0, 1]$ отрезок $[t_0, 1]$ и сделав, кроме того, два специальных выбора а) и б):

а) Выберем шар $E \subset N$ настолько малым, чтобы для всех $x \in E$ выполнялись неравенства леммы 5.9 и равенство $\tilde{h}(x) = h_{t_0}(x)$.

Отметим, что на множестве $[t_0, 1] \times \{\bar{E}_1 \cup (R^n - E)\}$, где ранее было определено \bar{h}_t , мы имеем

$$\left| \frac{\partial h_t(x)}{\partial t} \right| < Kr, \quad r - \text{радиус } E. \quad (**)$$

Кроме того, $\frac{\partial \bar{h}_t(x)}{\partial t}$ есть R^n -компонента $\vec{\tau}(t, y)$. Таким образом, из построений, проведенных на стр. 60, ясно, что мы можем

б) выбрать продолженную R^n -компоненту $\vec{\xi}(t, y)$ поля $\vec{\tau}(t, y)$, имеющую всюду модуль меньший, чем $k_1 r$.

Тогда \bar{h}_t всюду на $[t_0, 1] \times R^n$ будет удовлетворять условию (**).

Мы утверждаем, что \bar{h}_t не будет порождать новых пересечений образа R^a с R^b при $t_0 \leq t \leq t_0 + k/K$. Действительно, если $x \in R^a \cap (E - E_1)$, то расстояние от $\bar{h}_{t_0}(x)$ до R^b равно

$$|\pi_a \bar{h}_{t_0}(x)| = |\pi_a h_{t_0}(x)| > kr.$$

Таким образом, из (**) видно, что при $t_0 \leq t \leq t_0 + k/K$

$$|\pi_a \bar{h}_t(x)| > kr - (t - t_0)Kr \geq 0.$$

Наконец, для того чтобы сделать возможной композицию подобных изотопий, мы можем задать t

так, чтобы изотопия \bar{h}_t , $t_0 \leq t \leq t'_0 = \min(1, t_0 + k/K)$, определялась соотношениями

$$\bar{h}_t(x) = \begin{cases} \bar{h}(x) & \text{для } t, \text{ близких к } t_0, \\ \bar{h}_{t'_0}(x) & \text{для } t, \text{ близких к } t'_0. \end{cases}$$

Ввиду того что постоянная k/K зависит только от h_t , искомая гладкая изотопия является композицией конечного числа изотопий, построенных вышеописанным способом. Итак, доказательство теоремы 5.6 завершено. Это означает, что утверждение 6 (стр. 54) доказано, а вместе с ним закончено полное доказательство первой теоремы о взаимном уничтожении критических точек.

§ 6. СИЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОМ УНИЧТОЖЕНИИ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, используются сингулярные гомологии с целыми коэффициентами.

Пусть M и M' — гладкие подмногообразия размерности r и s гладкого многообразия V размерности $r+s$ с точками трансверсального пересечения p_1, \dots, p_k . Предположим, что M ориентировано и что нормальное расслоенное пространство $\nu(M')$ подмногообразия M' в V также ориентировано. Выберем в точке p_i положительно ориентированный репер ξ_1, \dots, ξ_r линейно независимых векторов, порождающих касательное пространство TM_{p_i} к M в точке p_i . Ввиду того, что пересечение в точке p_i трансверсально, векторы ξ_1, \dots, ξ_r образуют базис слоя в точке p_i нормального расслоенного пространства $\nu(M')$.

Определение 6.1. *Индекс пересечения M и M' в точке p_i по определению равен $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли базис ξ_1, \dots, ξ_r положительно или отрицательно ориентированным базисом слоя пространства $\nu(M')$ в точке p_i . Индексом пересечения $M' \cdot M$ подмногообразий M и M' называется сумма индексов пересечения по всем точкам p_i .*

Замечание 1. В выражении $M' \cdot M$ мы будем писать первым многообразие с ориентированным нормальным расслоенным пространством.

Замечание 2. Если V ориентируемо, то любое его подмногообразие N ориентируемо тогда и только тогда, когда его нормальное расслоенное

пространство ориентируемо. В самом деле, если ориентация N задана, то можно естественным образом определить и ориентацию $v(N)$, и наоборот. А именно, потребуем, чтобы в каждой точке N положительно ориентированный репер касательного пространства N вместе с положительно ориентированным репером $v(N)$ давал положительно ориентированный репер V .

Следовательно, если V ориентировано, то можно естественным образом ориентировать $v(M)$ и M' . Нетрудно проверить, используя эти ориентации, что

$$M \cdot M' = (-1)^{rs} M' \cdot M.$$

Если ориентация подмногообразия и ориентация его нормального расслоенного пространства не согласованы в вышеуказанном смысле, то тем не менее очевидно, что $M \cdot M' = \pm M' \cdot M$ при условии, что V ориентируемо.

Предположим теперь, что M, M' и V — компактные связные многообразия без края. Мы докажем лемму, из которой следует, что индекс пересечения $M \cdot M'$ не меняется при деформациях M или накрывающей изотопии M' , и которая позволяет определить индекс пересечения двух замкнутых связных подмногообразий V дополнительных размерностей, но не обязательно с трансверсальным пересечением. Эта лемма основана на следующем следствии теоремы Тома об изоморфизме (см. приложение к работе Милнора [15]) и на теореме о трубчатой окрестности (см. Манкрес [8] и Ленг [5] или Милнор [12]).

Лемма 6.2 (без доказательства). Для M' и V , определенных, как и выше, имеет место естественный изоморфизм

$$\psi: H_0(M') \rightarrow H_r(V, V - M').$$

Пусть α является канонической образующей группы $H_0(M') \cong \mathbb{Z}$, и пусть $[M] \in H_r(M)$ есть образующая ориентации. Упомянутая лемма формулируется так:

Лемма 6.3. В последовательности

$$H_r(M) \xrightarrow{g} H_r(V) \xrightarrow{g'} H_r(V, V - M'),$$

где g и g' индуцированы включениями, имеем

$$g' \circ g([M]) = M^* \cdot M\psi(\alpha).$$

Доказательство. Возьмем попарно непересекающиеся r -мерные клетки U_1, \dots, U_k в M , содержащие p_1, \dots, p_k соответственно. Из естественности изоморфизма Тома следует, что индуцированное вложением отображение

$$H_r(U_i, U_i - p_i) \rightarrow H_r(V, V - M')$$

есть изоморфизм, задаваемый соотношением $\gamma_i \rightarrow \varepsilon_i \psi(\alpha)$, где γ_i — образующая ориентации группы $H_r(U_i, U_i - p_i)$, а ε_i — индекс пересечения M и M' в p_i . Доказательство завершается рассмотрением следующей коммутативной диаграммы, в которой указанный изоморфизм индуцируется вырезанием, а остальные гомоморфизмы индуцированы включениями:

$$\begin{array}{ccccc} H_r(M) & \xrightarrow{g} & H_r(V) & \xrightarrow{g'} & H_r(V, V - M') \\ \downarrow & & \nearrow & & \uparrow \\ H_r(M, M - M \cap M') & \xrightarrow{\cong} & \sum_{i=1}^k H_r(U_i, U_i - p_i) & & \end{array}$$

Теперь мы в состоянии усилить первую теорему о взаимном уничтожении критических точек 5.4. Вернемся к исходной ситуации теоремы 5.4, описанной на стр. 46. А именно: $(W^n; V_0, V_1)$ — триада с функцией Морса f , а ξ — его градиентно-подобное векторное поле, p и p' — критические точки f индекса λ и $\lambda+1$ соответственно, причем $f(p) < 1/2 < f(p')$. Предположим, что левосторонняя сфера S'_L в $V = f^{-1}(1/2)$ ориентирована, и то же верно для нормального расслоенного пространства правосторонней сферы S_R в V .

Теорема 6.4. (Вторая теорема о взаимном уничтожении критических точек.) Пусть W , V_0 и V_1 односвязны и $\lambda \geq 2$, $\lambda+1 \leq n-3$.

Если $S_R \cdot S'_L = \pm 1$, то W^n диффеоморфно $V_0 \times [0, 1]$. В самом деле, если $S_R \cdot S'_L = \pm 1$, то можно так изменить поле ξ вблизи V , чтобы право- и левосторонние сферы в V трансверсально пересекались в единственной точке; теперь применимы заключения теоремы 5.4.

Замечание 1. Отметим, что $V = f^{-1}(1/2)$ также односвязно. Действительно, дважды применяя теорему Ван Кампена (Кроуэлл и Фокс [4]), мы получим $\pi_1(V) \cong \pi_1(D_R^{n-\lambda}(p) \cup V \cup D_L^{\lambda+1}(q))$. (Здесь использованы условия $\lambda \geq 2$, $n - \lambda \geq 3$.) Но согласно 3.4 включение $D_R(p) \cup V \cup D_L(q) \subset W$ является гомотопной эквивалентностью. Комбинируя два эти утверждения, видим, что $\pi_1(V) = 1$.

Замечание 2. Укажем на то, что утверждение теоремы, очевидно, всегда верно, если $\lambda = 0$ или $\lambda = n - 1$. Читатель может также с помощью теоремы 6.6 проверить, что теорема остается верной даже при одном единственном ограничении на размерность $n \geq 6$! (Мы не будем проверять случаи $\lambda = 1$ и $\lambda = n - 2$.) Одно обобщение, которое нам полезно, получается переворачиванием триады:

Следствие 6.5. Теорема 6.4 остается верной и при следующих ограничениях на размерность: $\lambda \geq 3$, $\lambda + 1 \leq n - 2$.

Доказательство следствия. Ориентируем S_R и нормальное расслоенное пространство $\nu(S'_L)$ сферы S'_L в V . Многособразие W односвязно и, следовательно, ориентируемо. Значит, ориентируемо и V , и из замечания 2 на стр. 65 следует, что

$$S'_L \cdot S_R = \pm S_R \cdot S'_L = \pm 1.$$

Если мы применим теперь теорему 6.4 к триаде $(W^n; V_1, V_0)$ с функцией Морса — f и градиентно-подобным векторным полем ξ , то, очевидно, доказательство будет закончено.

Доказательство теоремы 6.4 основано на следующей тонкой теореме, принадлежащей по существу Уитни [31].

Теорема 6.6 Пусть M и M' — гладкие, замкнутые, трансверсально пересекающиеся подмногообразия размерностей r и s в гладком $(r+s)$ -мерном многообразии V (без края). Предположим, что M и нормальное расслоенное пространство M' в V ориентированы. Пусть, далее, $r+s \geq 5$, $s \geq 3$, а в случае, когда $r=1$ или $r=2$, индуцированное включением отображение $\pi_1(V - M') \rightarrow \pi_1(V)$ является мономорфизмом.

Пусть $p, q \in M \cap M'$ — точки с противоположными по знаку индексами пересечения, для которых найдется стягиваемый в V контур L , состоящий из двух гладких дуг, одна из которых вложена в M и ведет из p в q , а другая продолжает первую, вложена в M' и ведет из q в p , причем обе дуги не пересекаются с $M \cap M' - \{p, q\}$.

При этих предположениях существует изотопия h_t , $0 \leq t \leq 1$, тождественного отображения $i: V \rightarrow V$, такая, что:

- i) изотопия не изменяет i вблизи $M \cap M' - \{p, q\}$;
- ii) $h_1(M) \cap M' = M \cap M' - \{p, q\}$.

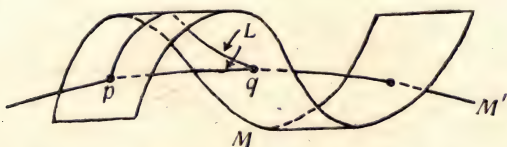


Рис. 6.1.

Замечание. Если M и M' связны, $r \geq 2$ и V односвязно, то явное предположение о существовании контура L не является необходимым. Действительно, используя теорему Хопфа—Ринова (см. Милнор [16]) и полные римановы метрики на $M - S$

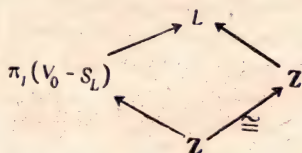
и $M' - S$, где $S = M \cap M' - \{p, q\}$, мы сможем найти гладкую, вложенную в V дугу, ведущую из точки p в точку q в M и, аналогично, из точки q в точку p в M' , которые вместе образуют контур L , не проходящий через S . Само собой разумеется, что контур L стягиваем, так как V односвязно.

Доказательство теоремы 6.4. Согласно 5.2, можно так предварительно изменить ξ вблизи V , чтобы S_R и S'_L пересекались трансверсально. Если $S_R \cap S'_L$ состоит более чем из одной точки, то равенство $S_R \cdot S'_L = \pm 1$ гарантирует существование пары точек p_1, q_1 из $S_R \cap S'_L$, в которых индексы пересечения противоположны по знаку. Если мы сумеем показать, что в этой ситуации применима теорема 6.6, то после соответствующего изменения ξ вблизи V число точек пересечения S_R и S'_L , в силу леммы 4.6, уменьшится на две. Таким образом, если повторить этот процесс конечное число раз, то S_R и S'_L будут пересекаться трансверсально в единственной точке, и тем самым теорема будет доказана.

Ввиду того, что V односвязно (замечание 1, стр. 68), условия теоремы 6.6 в случае $\lambda \geq 3$, очевидно, выполняются. Если же $\lambda = 2$, то остается показать, что гомоморфизм $\pi_1(V - S_R) \rightarrow \pi_1(V) = 1$ взаимно однозначен, т. е. что $\pi_1(V - S_R) = 1$. Но траектории поля ξ определяют диффеоморфизм $V_0 - S_L$ на $V - S_R$, где через S_L обозначена левосторонняя одномерная сфера точки p в V_0 . Пусть N — тривиально расслоенная окрестность S_L в V_0 . Поскольку $n - \lambda - 1 = n - 3 \geq 3$, имеем $\pi_1(N - S_L) \cong \mathbb{Z}$, и включениям

$$\begin{array}{ccc} & V_0 & \\ \cup & & \cup \\ V_0 - S_L & & N \\ \cup & & \cup \\ (V_0 - S_L) \cap N & = & N - S_L \end{array}$$

соответствует диаграмма фундаментальных групп



Из теоремы Ван Кампена следует, что $\pi_1(V_0 - S_L) = 1$. Это рассуждение завершает доказательство теоремы 6.4 с точностью до недоказанной еще теоремы 6.6.

Доказательство теоремы 6.6. Предположим, что индексы пересечения в точках p и q равны $+1$ и -1 соответственно. Пусть C и C' — гладкие

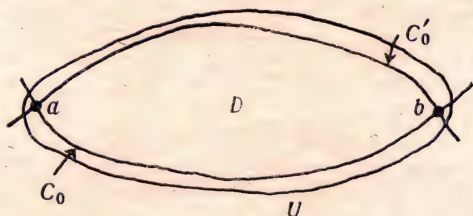


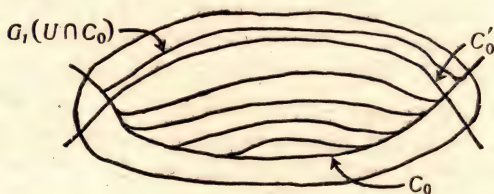
Рис. 6.2. Стандартная модель.

дуги в M и M' , соединяющие p и q и немного продолженные на концах. Пусть C_0 и C'_0 — две открытые дуги на плоскости, пересекающиеся трансверсально в точках a и b и окаймляющие диск D (с двумя углами), как это изображено на рис. 6.2. Построим вложение $\varphi_1: C_0 \cup C'_0 \rightarrow M \cup M'$ так, чтобы $\varphi_1(C_0)$ и $\varphi_1(C'_0)$ совпадали с дугами C и C' , а точки a и b соответствовали точкам p и q . Теорема немедленно следует из леммы о вложении стандартной модели:

Лемма 6.7. Для некоторой окрестности U диска D можно продолжить вложение $\varphi_1|_{U \cap (C_0 \cup C'_0)}$ до вложения $\varphi: U \times R^{r-1} \times R^{s-1} \rightarrow V$, такого, что $\varphi^{-1}(M) = (U \cap C_0) \times R^{r-1} \times 0$ и $\varphi^{-1}(M') = (U \cap C'_0) \times 0 \times R^{s-1}$.

Предполагая, что лемма 6.7 справедлива, построим изотопию $F_t: V \rightarrow V$, такую, что F_0 является тождественным отображением, $F_1(M) \cap M' = M \cap M' - \{p, q\}$ и F_t тождественно вне образа φ , $0 \leq t \leq 1$.

Обозначим $\varphi(U \times R^{r-1} \times R^{s-1})$ через W и определим F_t как тождественное отображение на $V - W$. На W определим F_t согласно следующей схеме.



Р и с. 6.3.

Построим изотопию $G_t: U \rightarrow U$ нашей плоской модели так, чтобы:

- 1) G_0 было тождественным отображением;
- 2) G_t было тождественным в окрестности границы $\bar{U} - U$ окрестности U , $0 \leq t \leq 1$;

- 3) $G_1(U \cap C_0) \cap C'_0 = \emptyset$ (см. рис. 6.3).

Пусть $\rho: R^{r-1} \times R^{s-1} \rightarrow [0, 1]$ — гладкая функция ($x \in R^{r-1}$, $y \in R^{s-1}$), определяемая формулой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x|^2 + |y|^2 \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x|^2 + |y|^2 \geq 2. \end{cases}$$

Изотопию $H_t: U \times R^{r-1} \times R^{s-1} \rightarrow U \times R^{r-1} \times R^{s-1}$ определим, полагая

$$H_t(u, x, y) = (G_{t\rho(x, y)}(u), x, y), \quad u \in U.$$

Легко видеть, что соотношение $F_t(w) = \varphi \circ H_t \circ \varphi^{-1}(w)$, $w \in W$, определяет искомую изотопию W , что и доказывает теорему 6.6 с точностью до недоказанной леммы 6.7.

Лемма 6.8. На V можно ввести такую риманову метрику, что:

1) в ассоциированной с этой метрикой связности (см. Милнор [16]) M и M' являются вполне геодезическими подмногообразиями V (т. е. если геодезическая в V касается M или M' в некоторой точке, то она целиком принадлежит M или M' соответственно);

2) существуют координатные окрестности N_p и N_q точек p и q , в которых метрика является евклидовой, причем $N_p \cap C$, $N_p \cap C'$, $N_q \cap C$ и $N_q \cap C'$ суть отрезки прямых линий.

Доказательство (Е. Фельдмана). По условию M и M' пересекаются трансверсально в точках p_1, \dots, p_h , где $p=p_1$ и $q=p_2$. Покроем $M \cup M'$ координатными окрестностями W_1, \dots, W_m в V с координатными диффеоморфизмами $h_i: W_i \rightarrow R^{r+s}$, $i=1, \dots, m$, таким образом, чтобы:

а) существовали попарно непересекающиеся координатные окрестности N_1, \dots, N_k точек p_i , $i=1, \dots, k$, причем $p_i \in N_i \subset \bar{N}_i \subset W_i$, $N_i \cap W_j = \emptyset$, а $j=k+1, \dots, m$;

б) $h_i(W_i \cap M) \subset R^r \times 0$,
 $h_i(W_i \cap M') \subset 0 \times R^s$, $i=1, \dots, k$;

с) $h_i(W_i \cap C)$ и $h_i(W_i \cap C')$ были отрезками прямых в R^{r+s} , $i=1, 2$.

Используя разбиение единицы, осуществим склейку римановых метрик, индуцированных на каждой из окрестностей W_i диффеоморфизмами h_i , $i=1, \dots, m$, и тем самым введем на открытом множестве $W_0 = W_1 \cup \dots \cup W_m$ риманову метрику $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Заметим, что ввиду а) эта метрика является евклидовой в окрестности N_i , $i=1, \dots, k$.

С помощью этой метрики и экспоненциального отображения (см. Ленг [5]) мы построим открытые трубчатые окрестности T и T' подмногообразий M и M' в W_0 . Взяв эти окрестности достаточно «тонкими», мы можем считать, что $T \cap T' \subset N_1 \cup \dots \cup N_k$ и что, кроме того, для некоторых $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, зависящих от i ,

$$h_i(T \cap T' \cap N_i) = OD_\varepsilon^r \times OD_{\varepsilon'}^s \subset R^r \times R^s = R^{r+s}, \quad i=1, \dots, k.$$

Эта ситуация изображена схематически на рис. 6.4.

Пусть $A: T \rightarrow T$ есть гладкая инволюция ($A^2 = A \circ A$ есть тождественное отображение), переворачивающая каждый слой T . Определим новую риманову метрику $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_A$ на T , положив $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_A = \frac{1}{2} (\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle A_* \vec{v}, A_* \vec{w} \rangle)$.

Утверждение. В этой метрике M является вполне геодезическим подмногообразием T .

Доказательство. Чтобы проверить это, предположим, что ω есть геодезическая в T , касательная

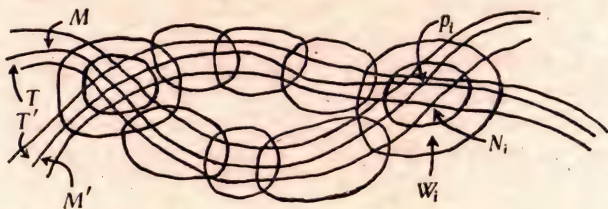


Рис. 6.4.

к M в некоторой точке $z \in M$. Легко видеть, что в новой метрике A является изометрическим отображением T и, следовательно, переводит геодезические в геодезические. Так как M — неподвижная точка преобразования A , то отсюда следует, что $A(\omega)$ и ω суть геодезические с общим касательным вектором в точке $A(z) = z$. В силу единственности геодезической, выходящей из данной точки в данном направлении, преобразование A должно быть тождественным на ω . Следовательно, $\omega \subset M$, что и требовалось доказать.

Подобным же образом мы определим новую метрику $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{A'}$ на T' . Из свойства b), а также из вида многообразия $T \cap T'$ вытекает, что эти две новые метрики согласованы с прежней метрикой на $T \cap T'$ и, следовательно, определяют метрику на $T \cup T'$. Продолжив на все V ограничение этой метрики на открытом множестве U , где $M \cup M' \subset U \subset \bar{U} \subset T \cup T'$, мы за-

вершим построение метрики на V , удовлетворяющей условиям 1) и 2).

Доказательство леммы 6.7. (Доказательство занимает всю оставшуюся часть § 6.) Введем на V риманову метрику, построенную в лемме 6.8. Обозначим через $\tau(p)$, $\tau(q)$, $\tau'(p)$, $\tau'(q)$ единичные касательные векторы дуг S и S' (ориентированных от p к q) в точках p и q . Так как S — стягиваемое

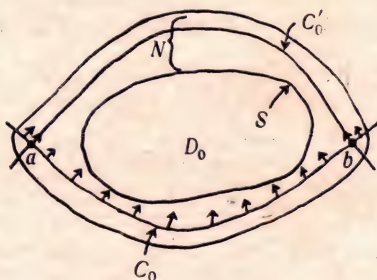


Рис. 6.5.

пространство, то расслоенное пространство с базой S векторов, ортогональных к M , будет тривиальным. Используя этот факт, построим вдоль S поле единичных векторов, ортогональных к M и равных векторам, полученным из $\tau'(p)$ и $-\tau'(q)$ параллельным переносом вдоль дуг $N_p \cap S$ и $N_q \cap S$ соответственно.

Построим соответствующее векторное поле на плоской модели (см. рис. 6.5).

Легко видеть, что с помощью экспоненциального отображения можно построить некоторую окрестность дуги S_0 на плоскости и продолжить $\varphi_1|_{S_0}$ до вложения этой окрестности в V . В самом деле, экспоненциальное отображение обеспечивает локальное вложение, после чего может быть применена следующая лемма, элементарное доказательство которой изложено у Манкреса [8, лемма 5.7 (сформулирована неверно)].

Лемма 6.9. Пусть A_0 — замкнутое подмножество компактного метрического пространства A . Пусть $f: A \rightarrow B$ — локальный гомеоморфизм, взаимно однозначный на A_0 . Тогда найдется окрестность множества A_0 , на которой отображение f также взаимно однозначно.

Подобным же образом, используя поле единичных векторов вдоль C' , ортогональных к M' и равных на $N_p \cap C'$ и $N_q \cap C'$ векторам, полученным из $\tau(p)$ и $-\tau(q)$ соответственно параллельным переносом вдоль этих дуг, мы продолжим $\varphi_1|_{C'_0}$ до вложения не-

которой окрестности дуги C'_0 . При $r=1$ это возможно только потому, что знаки индексов пересечения в точках p и q противоположны.

Используя свойство 2) метрики V (см. лемму 6.8), убеждаемся в том, что эти вложения согласованы в окрестности $C_0 \cap C'_0$ и, следовательно, определяют вложение $\varphi_2: N \rightarrow V$ замкнутой кольцевой окрестности N границы dD , причем $\varphi_2^{-1}(M) = N \cap C_0$ и $\varphi_2^{-1}(M') = N \cap C'_0$. Обозначим через S внутреннюю границу N и через $D_0 \subset D$ диск, ограниченный кривой S на плоскости (см. рис. 6.5).

Ввиду того, что контур L гомотопен контуру $\varphi_2(S)$, последний стягиваем в V . В действительности $\varphi_2(S)$ стягиваем уже в $V - (M \cup M')$, как это видно из следующей леммы.

Лемма 6.10. Если V_1^n ($n \geq 5$) — гладкое многообразие, M_1 — гладкое подмногообразие коразмерности ≥ 3 , то всякий контур в $V_1 - M_1$, стягиваемый в V_1 , стягиваем уже в $V_1 - M_1$.

Прежде чем доказывать 6.10, напомним две теоремы Уитни.

Лемма 6.11. (См. Милнор [11, стр. 62 и стр. 63].) Пусть дано непрерывное отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ гладких многообразий, гладкое на замкнутом подмножестве $A \subset M_1$. Тогда существует гладкое отображение $g: M_1 \rightarrow M_2$, такое, что $g \cong f$ (g гомотопно f) и $g|_A = f|_A$.

Лемма 6.12. (См. Уитни [30] и Милнор [11, стр. 63].) Пусть дано гладкое отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ гладких многообразий, являющееся вложением на замкнутом подмножестве $A \subset M_1$. Пусть $\dim M_2 \geq 2 \dim M_1 + 1$. Тогда существует такое вложение $g: M_1 \rightarrow M_2$, аппроксимирующее отображение f , что $g \cong f$ и $g|_A = f|_A$.

Доказательство леммы 6.10. Пусть отображение $g: (D^2, S^1) \rightarrow (V_1, V_1 - M_1)$ осуществляет стягивание в V_1 контура из $V_1 - M_1$. Ввиду того, что $\dim (V_1 - M_1) \geq 5$, сформулированные выше леммы обеспечивают существование гладкого вложения

$$h: (D^2, S^1) \rightarrow (V_1, V_1 - M_1),$$

где $g|_{S^1}$ гомотопно $h|_{S^1}$ на $V_1 - M_1$.

Нормальное расслоенное пространство $\nu(h(D^2))$ тривиально, так как $h(D^2)$ стягиваемо. Следовательно, существует вложение $H: D^2 \times R^{n-2} \rightarrow V_1$, так что $H(u, 0) = h(u)$ для всех $u \in D^2$. Выберем ε настолько малым, чтобы неравенство $|\vec{x}| < \varepsilon$, $\vec{x} \in R^{n-2}$, влекло за собой включение $H(S^1 \times \vec{x}) \subset V_1 - M_1$. Ввиду того, что $\text{codim } M_1 \geq 3$, найдется (ср. с леммой 4.5) $\vec{x}_0 \in R^{n-2}$, $|\vec{x}_0| < \varepsilon$, для которого $H(D^2 \times \vec{x}_0) \cap M_1 = \emptyset$. При этом на $V_1 - M_1$ имеем $g|_{S^1} \cong h|_{S^1} = H|_{S^1 \times 0} \cong H|_{S^1 \times \vec{x}_0} \cong \text{const}$. Доказательство закончено.

Теперь мы в состоянии показать, что контур $\varphi(S)$ стягиваем в $V - MUM'$. Действительно, при $r \geq 3$ он стягиваем в $V - M'$ согласно 6.10, а при $r = 2$ согласно предположению, что гомоморфизм $\pi_1(V - M') \rightarrow \pi_1(V)$ является мономорфизмом. Таким образом, поскольку $s \geq 3$, $\varphi(S)$ стягиваем также и в $(V - M') - M = V - (MUM')$, что следует из леммы 6.10.

Построим теперь непрерывное продолжение φ_2 на $U = NUD_0$:

$$\varphi'_2: U \rightarrow V,$$

отображающее $\text{Int } D$ в $V - (MUM')$. Применяя леммы 6.11 и 6.12 к $\varphi'_2|_{\text{Int } D}$, мы получим гладкое

вложение $\varphi_3: U \rightarrow V$, совпадающее с φ_2 на окрестности множества $U - \text{Int } D$ и такое, что $\varphi_3(u) \notin MUM'$, если $u \notin C_0 \cup C'_0$.

Нам остается теперь только продолжить φ_3 на $U \times R^{r-1} \times R^{s-1}$, что и является нашей целью.

Обозначим $\varphi_3(U)$ через U' и для краткости будем использовать обозначения C , C' , C_0 и C'_0 вместо $U' \cap C$, $U' \cap C'$, $U' \cap C_0$ и $U' \cap C'_0$ соответственно.

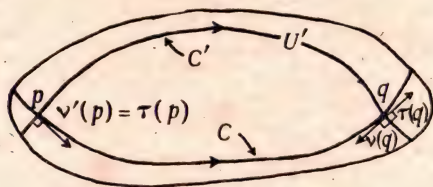


Рис. 6.6.

Лемма 6.13. На множестве U' существуют векторные поля $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \eta_1, \dots, \eta_{s-1}$, являющиеся

- 1) ортонормальными и ортогональными к U' , причем
- 2) ξ_1, \dots, ξ_{r-1} являются вдоль C касательными к M ;
- 3) $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ являются вдоль C' касательными к M' .

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы построить поля ξ_1, \dots, ξ_{r-1} в несколько этапов, сначала осуществив параллельный перенос вдоль C , затем продолжив их на $CU C'$ в качестве слоя некоторого расслоения, а затем на все U' в качестве слоя еще одного расслоения. Опишем это построение подробнее.

Пусть τ и τ' — нормализованные векторы скорости при движении вдоль C и C' , и пусть v' — поле единичных векторов вдоль C' , касательных к U' и направленных внутрь U' ортогонально к C' . Тогда $v'(p) = \tau(p)$ и $v'(q) = -\tau(q)$ (см. рис. 6.6).

В пространстве, касательном к M в точке p , выберем $r-1$ векторов $\xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$, которые

ортогональны к U' и образуют после присоединения к ним вектора $\tau(p)$ положительно ориентированный репер в TM_p . Перенесем эти $r-1$ векторов параллельно вдоль C ; мы получим $r-1$ гладких векторных полей ξ_1, \dots, ξ_{r-1} вдоль C . Они удовлетворяют условию 1), так как параллельный перенос сохраняет внутреннее произведение (см. Милнор [16]). Они также удовлетворяют и условию 2), так как параллельный перенос вдоль кривой на вполне геодезическом многообразии M переводит касательные к M векторы в касательные.

В действительности, при задании римановой метрики с помощью конструкции, описанной в лемме 6.8, условие 2 легко следует из существования «переворачивающей изометрии» A , действующей на трубчатой окрестности M (ср. с рассуждением на стр. 74). Наконец, по непрерывности репер $\tau, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ положительно ориентирован в TM (касательном расслоенном пространстве M) в каждой точке дуги C .

Перенесем теперь $\xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ параллельно вдоль $N_p \cap C'$ и $\xi_1(q), \dots, \xi_{r-1}(q)$ — вдоль $N_q \cap C'$. Индексы пересечения M и M' в p и q равны по предположению $+1$ и -1 соответственно. Это означает, что репер $\tau(p), \xi_1(p), \dots, \xi_{r-1}(p)$ положительно ориентирован в $\nu(M')|_p$, а репер $\tau(q), \xi_1(q), \dots, \xi_{r-1}(q)$ ориентирован в $\nu(M')|_q$ отрицательно. Ввиду равенств $\nu'(p) = \tau(p)$ и $\nu'(q) = -\tau(q)$ заключаем, что репер $\nu', \xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ положительно ориентирован в $\nu(M')$ во всех точках множеств $N_p \cap C'$ и $N_q \cap C'$.

Расслоенное пространство с базой C' и связным слоем, являющимся пространством $(r-1)$ -мерных реперов ξ_1, \dots, ξ_{r-1} , ортогональных к M' и U' , и таких, что базис $\nu', \xi_1, \dots, \xi_{r-1}$ положительно ориентирован в $\nu(M')$, является тривиальным. Поэтому мы можем продолжить ξ_1, \dots, ξ_{r-1} до гладкого поля $(r-1)$ -мерного репера на $C \cup C'$ так, чтобы выполнялись условия 1) и 2).

Расслоенное пространство с базой U' ортонормальных $(r-1)$ -мерных реперов, ортогональных к U' , является тривиальным расслоением со слоем $O(r+s-2)/O(s-1) = V_{r-1}(R^{r+s-2})$ (многообразием

Штифеля ортонормальных $(r-1)$ -мерных реперов в R^{r+s-2}). Итак, мы построили гладкое сечение $\xi_1, \dots, \dots, \xi_{r-1}$ этого расслоенного пространства над CUC' . Проектируя ξ_1, \dots, ξ_{r-1} в слой, мы получим гладкое отображение CUC' в $O(r+s-2)/O(s-1)$, являющееся односвязным в силу неравенства $s \geq 3$ (см. Стинрод [27]). Следовательно, существует непрерывное продолжение на U' , а согласно лемме 6.11 существует и гладкое продолжение. Таким образом, мы сможем определить ξ_1, \dots, ξ_{r-1} на всем U' так, чтобы выполнялись условия 1) и 2).

Чтобы определить остальные векторные поля, заметим, что расслоенное пространство над U' ортонормальных реперов $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ из TV , когда каждый из векторов η_i ортогонален U' и всем векторам ξ_1, \dots, ξ_{r-1} , является тривиальным в силу стягиваемости U' . Пусть искомое поле репера $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ на U' является гладким сечением этого расслоенного пространства. Тогда векторы $\xi_1, \dots, \xi_{r-1}, \eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ удовлетворяют условию 1). Далее, из ортогональности векторов ξ_1, \dots, ξ_{r-1} к M' вдоль C' следует, что $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ удовлетворяют 3). На этом доказательство леммы 6.13 закончено.

Окончание доказательства леммы 6.7. Определим отображение $U \times R^{r-1} \times R^{s-1} \rightarrow V$, положив

$$(u, x_1, \dots, x_{r-1}, y_1, \dots, y_{s-1}) \rightarrow \exp \left[\sum_{i=1}^{r-1} x_i \xi_i (\varphi_3(u)) + \sum_{j=1}^{s-1} y_j \eta_j (\varphi_3(u)) \right].$$

Так как это отображение является локальным диффеоморфизмом, то из леммы 6.9 следует существование такой открытой ε -окрестности N_ε начала координат в $R^{r+s-2} = R^{r-1} \times R^{s-1}$, что ограничение этого отображения на $U \times N_\varepsilon$ является вложением $\varphi_4: U \times N_\varepsilon \rightarrow V$. (Быть может, U следует заменить немного меньшей окрестностью, которую мы будем по-прежнему обозначать через U .)

Определим вложение $\varphi: U \times R^{r-1} \times R^{s-1} \rightarrow V$, положив $\varphi(u, z) = \varphi_4\left(u, \frac{\varepsilon z}{\sqrt{1+|z|^2}}\right)$. Тогда $\varphi(C_0 \times R^{r-1} \times 0) \subset M$ и $\varphi(C'_0 \times 0 \times R^{s-1}) \subset M'$, поскольку M и M' являются вполне геодезическими подмногообразиями V . Кроме того, так как пересечение $\varphi(U \times 0) = U'$ с M и M' трансверсально и состоит из дуг C и C' , то для достаточно малого $\varepsilon > 0$ образ отображения φ пересекается с M и M' точно по вышеописанным тривиально расслоенным окрестностям дуг C и C' . Это означает, что $\varphi^{-1}(M) = C_0 \times R^{r-1} \times 0$ и $\varphi^{-1}(M') = C'_0 \times 0 \times R^{s-1}$. Таким образом, φ осуществляет искомое вложение. На этом доказательство леммы 6.7 закончено.

§ 7. ВЗАИМНОЕ УНИЧТОЖЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК В СРЕДНИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Определение 7.1. Пусть n -мерное многообразие W является компактным, гладким и ориентированным, и пусть $X = dW$. Легко проверить, что на X можно ввести некоторую ориентацию, называемую *индуцированной ориентацией*, если считать, что $(n-1)$ -мерный репер $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ векторов, касательных к X в некоторой точке $x \in X$, является положительно ориентированным, когда n -мерный репер $v, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ положительно ориентирован в TW_x , где v — некоторый вектор в точке x , касающийся W , но не X , и направленный вне W (т. е. v внешне нормален к X).

Или, иначе, мы выделяем элемент $[X] \in H_{n-1}(X)$ как *индуцированную образующую ориентации* для X , где $[X]$ является образом образующей ориентации $[W] \in H_n(W, X)$ для W при граничном гомоморфизме $H_n(W, X) \rightarrow H_{n-1}(X)$ точной последовательности пары (W, X) .

З а м е ч а н и е. Читатель сравнительно легко установит естественное соответствие между ориентацией компактного многообразия M^n , заданной с помощью ориентации касательного расслоенного пространства (в терминах упорядоченных реперов), и ориентацией M , заданной с помощью образующей $[M] \in H_n(M, \mathbb{Z})$ (см. Милнор [15, стр. 21]). Нетрудно убедиться в том, что два указанных выше способа ориентации dW эквивалентны в силу этого естественного соответствия. Так как мы всегда будем использовать второй способ ориентации dW , то доказательство опускается.

Пусть теперь заданы n -мерные триады $(W; V, V')$, $(W'; V', V'')$ и $(W \cup W'; V, V'')$. Пусть, кроме того, f есть функция Морса на $W \cup W'$ с критическими точками $q_1, \dots, q_l \in W$ и $q'_1, \dots, q'_m \in W'$, такими, что все точки q_1, \dots, q_l лежат на одном уровне и имеют индекс λ , в то время как q'_1, \dots, q'_m лежат на другом уровне и имеют индекс $\lambda+1$, а многообразие V' принадлежит некритическому уровню между этими двумя уровнями. Выберем для f градиентно-подобное поле и ориентируем левосторонние диски $D_L(q_1), \dots, D_L(q_l)$ в W и $D'_L(q'_1), \dots, D'_L(q'_m)$ в W' .

Ориентация нормального расслоенного пространства $\nu D_R(q_i)$ правостороннего диска в W определяется тогда из условия, состоящего в том, что индекс пересечения $D_L(q_i)$ и $D_R(q_i)$ в точке q_i равен $+1$. Нормальное расслоенное пространство $\nu S_R(q_i)$ сферы $S_R(q_i)$ в V' естественно изоморфно ограничению $\nu D_R(q_i)$ на $S_R(q_i)$. Следовательно, ориентация $\nu D_R(q_i)$ определяет ориентацию на $\nu S_R(q_i)$.

Объединяя определение 7.1 и рассуждения последнего абзаца, мы заключаем, что, как только выбрана ориентация для левосторонних дисков на W и W' , существует естественный способ ориентации левосторонних сфер на V' и нормальных расслоенных пространств правосторонних сфер на V' . Следовательно, определен индекс пересечения $S_R(q_i) \cdot S'_L(q'_j)$ лево- и правосторонних сфер на V' .

Из § 3 мы знаем, что $H_\lambda(W, V)$ и $H_{\lambda+1}(W \cup W', W) \cong H_{\lambda+1}(W', V')$ являются абелевыми свободными группами с образующими $[D_L(q_1)], \dots, [D_L(q_l)]$ и $[D'_L(q'_1)], \dots, [D'_L(q'_m)]$ соответственно, представленными ориентированными левосторонними дисками.

Лемма 7.2. Пусть M — ориентированное, замкнутое, гладкое многообразие размерности λ , вложенное в V' , с образующей ориентации $[M] \in H_\lambda(M)$, и пусть отображение $h: H_\lambda(M) \rightarrow H_\lambda(W, V)$ индуцировано включением. Тогда $h([M]) = (S_R(q_1) \cdot M)[D_L(q_1)] + \dots + (S_R(q_l) \cdot M)[D_L(q_l)]$, где через $S_R(q_i) \cdot M$ обозначен

индекс пересечения сферы $S_R(q_i)$ и подмногообразия $M \subset V'$.

Следствие 7.3. Относительно базиса, представленного ориентированными левосторонними дисками, граничное отображение

$$\partial: H_{\lambda+1}(W \cup W', W) \rightarrow H_{\lambda}(W, V)$$

триплета $W \cup W' \supset W \supset V$ задается матрицей (a_{ij}) индексов пересечения $a_{ij} = S_R(q_i) \cdot S'_L(q'_j)$ в V' , естественно определенных с помощью ориентаций, заданных на левосторонних дисках.

Доказательство. Рассмотрим один из базисных элементов $[D'_L(q'_j)] \in H_{\lambda+1}(W \cup W', W)$. Мы можем разложить отображение ∂ в композицию отображений:

$$\begin{array}{c} H_{\lambda}(S'_L(q'_j)) \\ \downarrow i_* \\ H_{\lambda+1}(W \cup W', W) \xrightarrow{\cong} H_{\lambda+1}(W', V') \xrightarrow{\text{Взятие границы}} H_{\lambda}(V') \\ \downarrow \\ H_{\lambda}(W) \\ \downarrow \\ H_{\lambda}(W, V) \end{array}$$

$\nearrow \text{Взятие границы}$
 $\searrow \partial$

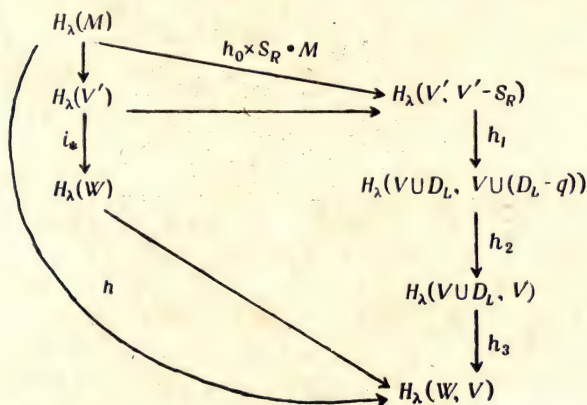
Здесь e — обращение изоморфизма вырезания, а отображение i_* индуцировано включением.

Согласно определению ориентации на $S'_L(q'_j)$ имеем
 $(\text{взятие границы}) \circ e([D'_L(q'_j)]) = i_*([S'_L(q'_j)]).$

Нужный результат получается после замены $M = S'_L(q'_j)$ в лемме 7.2.

Доказательство леммы 7.2. Мы будем предполагать, что $l=1$; в общем случае доказательство аналогично. Положим $q=q_1$, $D_L=D_L(q_1)$, $D_R=D_R(q_1)$ и $S_R=S_R(q_1)$. Нам нужно показать, что $h([M]) = (S_R \cdot M)[D_L]$.

Рассмотрим следующую диаграмму:



Деформационная ретракция $r: W \rightarrow VU D_L$, построенная в теореме 3.14, отображает $V' - S_R$ в $VU(D_L - q)$, так что гомоморфизм h_1 , индуцированный $r|_{V'}$, определен корректно. Естественная деформационная ретракция $VU(D_L - q)$ на V индуцирует изоморфизм h_2 . Все остальные гомоморфизмы индуцированы включениями.

Диаграмма коммутативна, поскольку $i_* = (r|_{V'})_*$ (отображения i и $r|_{V'}: V' \rightarrow W$ гомотопны), а соответствующая диаграмма топологических пространств и непрерывных отображений коммутирует поточечно, если i заменить на $r|_{V'}$.

Из леммы 6.3 известно, что $h_0([M]) = (S_R \cdot M)\psi(\alpha)$, где $\alpha \in H_0(S_R)$ есть каноническая образующая и $\psi: H_0(S_R) \rightarrow H_\lambda(V', V' - S_R)$ есть изоморфизм Тома. Следовательно, для доказательства равенства $h([M]) = (S_R \cdot M)[D_L]$ с использованием коммутативности диаграммы достаточно показать, что

$$h_3 \circ h_2 \circ h_1(\psi(\alpha)) = [D_L]. \quad (*)$$

Класс $\psi(\alpha)$ представлен некоторым ориентированным диском D^λ , трансверсально пересекающим S_R в

единственной точке x с индексом пересечения $S_R \cdot D^\lambda = +1$. Согласно описанию стандартной формы элементарного кобордиза в теореме 3.13, а также соглашениям, в силу которых $D(S_R)$ ориентирован, заключаем, что образ $r(D^\lambda)$ диска D^λ при ретракции r представляет собой

$$D_R \cdot D^\lambda = S_R \cdot D^\lambda = +1$$

раз взятую образующую ориентации $h_2^{-1}h_3^{-1}([D_L])$ группы $H_\lambda(V \cup D_L, V \cup (D_L - q))$. Отсюда следует, что

$$h_1\psi(\alpha) = h_2^{-1}h_3^{-1}([D_L])$$

или

$$h_3h_2h_1\psi(\alpha) = [D_L],$$

что и требовалось доказать. Доказательство закончено.

Если задан кобордизм c , представленный триадой $(W; V, V')$, то, согласно 4.7, имеем разложение $c = c_0c_1 \dots c_n$, в котором c_λ обладает функцией Морса, все критические точки которой принадлежат одному и тому же множеству уровня и имеют индекс λ . Пусть кобордизм $c_0c_1 \dots c_\lambda$ представлен многообразием $W_\lambda \subset W$, $\lambda = 0, 1, \dots, n$, и пусть $W_{-1} = V$, так что

$$V = W_{-1} \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_n = W.$$

Определим $C_\lambda = H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1}) \cong H_*(W_\lambda, W_{\lambda-1})$, и пусть $\partial: C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ есть граничный гомоморфизм точной последовательности триплета $W_{\lambda-2} \subset W_{\lambda-1} \subset W_\lambda$.

Теорема 7.4. $C_* = \{C_\lambda, \partial\}$ есть цепной комплекс (т. е. $\partial^2 = 0$) и $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(W, V)$ для всех λ .

Доказательство. (Заметим, что мы используем не тот факт, что C_λ есть свободная абелева группа, а только то, что группа $H_*(W_\lambda, W_{\lambda-1})$ нетривиальна лишь для порядка λ .)

Равенство $\partial^2=0$ очевидно из определения. Для того, чтобы установить изоморфизм, рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 C_{\lambda-1} = H_{\lambda-1}(W_{\lambda+1}, W_{\lambda}) & \longrightarrow & H_{\lambda}(W_{\lambda}, W_{\lambda-2}) & \longrightarrow & H_{\lambda}(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2}) & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow \partial & \downarrow & & \nearrow & & \\
 & & H_{\lambda}(W_{\lambda}, W_{\lambda-1}) = C_{\lambda} & & & & \\
 & & \downarrow \partial & & & & \\
 & & H_{\lambda-1}(W_{\lambda-1}, W_{\lambda-2}) = C_{\lambda-1} & & & &
 \end{array}$$

Горизонтальная линия гомоморфизмов образует точную последовательность триплета $(W_{\lambda+1}, W_{\lambda}, W_{\lambda-2})$, а вертикальная линия — триплета $(W_{\lambda}, W_{\lambda-1}, W_{\lambda-2})$. Легко проверить, что диаграмма коммутативна. Тогда ясно, что $H_{\lambda}(C_*) \cong H_{\lambda}(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2})$. Но $H_{\lambda}(W_{\lambda+1}, W_{\lambda-2}) \cong H_{\lambda}(W, V)$. Оставив читателю проверку этого последнего утверждения (см. Милнор [15, стр. 9]), получаем требуемый изоморфизм $H_{\lambda}(C_*) \cong H_{\lambda}(W, V)$.

Теорема 7.5. (Двойственность Пуанкаре.) *Если $(W; V, V')$ — триада гладких многообразий размерности n и W ориентировано, то группа $H_{\lambda}(W, V)$ изоморфна группе $H^{n-\lambda}(W, V')$ для всех λ .*

Доказательство. Пусть $c = c_0 c_1 \dots c_n$ и $C_* = \{C_{\lambda}, \partial\}$ определены с помощью соответствующей функции Морса f , как это сделано выше; пусть ξ — фиксированное градиентно-подобное векторное поле для f . При заданных ориентациях левосторонние диски кобордизма c_{λ} образуют базис группы $C_{\lambda} = H_{\lambda}(W_{\lambda}, W_{\lambda-1})$. Согласно следствию 7.3, отображение $\partial: C_{\lambda} \rightarrow C_{\lambda-1}$ задается матрицей индексов пересечений ориентированных левосторонних сфер из c_{λ} , имеющих ориентированные нормальные расслоенные пространства, с правосторонними сферами из $c_{\lambda-1}$.

Пусть теперь $W'_\mu \subset W$ представляет кобордизм $c_{n-\mu}c_{n-\mu+1} \dots c_n$ для всех $\mu=0, 1, \dots, n$, и пусть $W'_{-1} = V'$. Определим, как и раньше, $C_\mu = H_\mu(W'_\mu, W'_{\mu-1})$ и $\partial': C'_\mu \rightarrow C'_{\mu-1}$. Для любого правостороннего диска D_R заданная ориентация на $v(D_R)$ (индуцированная ориентацией левостороннего диска) вместе с ориентацией на W естественным образом определяют некоторую ориентацию D_R . Тогда $\partial: C'_\mu \rightarrow C'_{\mu-1}$ задается матрицей индексов пересечения правосторонних сфер с левосторонними, имеющими ориентированные нормальные расслоенные пространства.

Пусть $C'^* = \{C'^\mu, \delta'\}$ — коцепной комплекс, двойственный цепному комплексу $C'_* = \{C'_\mu, \partial'\}$. (Таким образом $C'^\mu = \text{Hom}(C'_\mu, \mathbf{Z})$.) В качестве базиса C'^μ возьмем базис, дуальный к базису C'_μ , который определен посредством ориентированных правосторонних дисков из $c_{n-\mu}$.

Изоморфизм $C_\lambda \rightarrow C'^{n-\lambda}$ устанавливается посредством сопоставления каждому ориентированному левостороннему диску дуального ориентированного правостороннего диска той же критической точки. Как мы доказали, гомоморфизм $\partial: C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ задается матрицей $(a_{ij}) = (S_R(p_i) \cdot S'_L(p'_j))$. Легко видеть, что $\delta': C'^{n-\lambda} \rightarrow C'^{n-\lambda+1}$ задается матрицей $(b_{ij}) = (S'_L(p'_j) \cdot S_R(p_i))$. Но так как W ориентировано, то $b_{ij} = \pm a_{ij}$, где знак зависит только от λ . (Ср. с замечанием 2 к определению 6.1; знак оказывается равным $(-1)^{\lambda-1}$.) Таким образом, ∂ соответствует $\pm \delta'$, и мы получаем, что изоморфизм группы цепей индуцирует изоморфизм $H_\lambda(C_*) \cong H^{n-\lambda}(C'^*)$.

Из 7.1 следует теперь, что $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(W, V)$ и $H_\mu(C'_*) \cong H_\mu(W, V')$ для всех λ и μ . Более того, из последнего изоморфизма следует, что $H^\mu(C'^*) \cong H^\mu(W, V')$ для всех μ . Действительно, если два цепных комплекса имеют изоморфные группы гомологий, то двойственные им коцепные комплексы имеют изоморфные группы когомологий. Это следует из общей теоремы о коэффициентах

Комбинируя результаты двух последних абзацев, мы получим требуемый изоморфизм $H_\lambda(W, V) \cong \cong H^{n-\lambda}(W, V')$.

Теорема 7.6. (Основная теорема.) Пусть заданы n -мерная триада $(W; V, V')$, функция Морса f на ней с критическими точками индекса λ , расположенными на одном множестве уровня, а также градиентно-подобное векторное поле ξ для f . Предположим, что $2 \leq \lambda \leq n-2$ и что W связно. Тогда для любого наперед заданного базиса группы $H_\lambda(W, V)$ найдутся функция Морса f' и градиентно-подобное векторное поле ξ' для f' , совпадающие с f и ξ соответственно в некоторой окрестности края $V \cup V'$ и такие, что f' имеет те же критические точки, что и f , по-прежнему расположенные на одном уровне, а левосторонние диски поля ξ' , подходящим образом ориентированные, образуют данный базис.

Доказательство. Пусть p_1, \dots, p_k — критические точки f и пусть b_1, \dots, b_k образуют базис $H_\lambda(W, V) \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (k слагаемых), представленный левосторонними дисками $D_L(p_1), \dots, D_L(p_k)$ с некоторыми фиксированными ориентациями. Пусть нормальные расслоенные пространства правосторонних дисков $D_R(p_1), \dots, D_R(p_k)$ ориентированы таким образом, что матрица $(D_R(p_i) \cdot D_L(p_j))$ индексов пересечения является единичной матрицей порядка k .

Рассмотрим сначала ориентированный λ -диск D , гладким образом вложенный в W , так что $dD \subset V$. Диск D представляет некоторый элемент

$$\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_k b_k \in H_\lambda(W, V)$$

с целыми $\alpha_1, \dots, \alpha_k$; это означает, что D гомологичен $\alpha_1 D_L(p_1) + \dots + \alpha_k D_L(p_k)$. Из легко доказываемого варианта леммы 6.3 для относительных гомологий следует, что для всех $j=1, \dots, k$

$$\begin{aligned} D_R(p_j) \cdot D &= D_R(p_j) \cdot [\alpha_1 D_L(p_1) + \dots + \alpha_k D_L(p_k)] = \\ &= \alpha_1 D_R(p_j) \cdot D_L(p_1) + \dots + \alpha_k D_R(p_j) \cdot D_L(p_k) = \alpha_j. \end{aligned}$$

Таким образом, D представляет элемент

$$D_R(p_1) \cdot D b_1 + \dots + D_R(p_k) \cdot D b_k.$$

Мы построим f' и ξ' так, чтобы новыми ориентированными левосторонними дисками были диски $D'_L(p_1), D_L(p_2), \dots, D_L(p_k)$, так что $D_R(p_1) \cdot D'_L(p_1) = D_R(p_2) \cdot D'_L(p_1) = +1$ и $D_R(p_j) \cdot D'_L(p_1) = 0$ для $j = 3, 4, \dots, k$. Из предыдущего абзаца следует, что новым базисом будет теперь $b_1 + b_2, b_2, \dots, b_k$. Возможна также замена базисного элемента на противоположный ему по знаку посредством простой перемены ориентации соответствующего левостороннего диска. Ввиду того, что композиция таких элементарных операций позволяет получить любой желаемый базис, это завершит доказательство.

В самых общих чертах это построение включает в себя следующее: увеличение f в окрестности p_1 , изменение векторного поля таким образом, чтобы левосторонний диск точки p_1 «прошел сквозь» p_2 с положительным знаком, и, наконец, такое изменение функции, чтобы она имела лишь одно критическое значение.

Точнее, используя 4.1, построим функцию Морса f_1 , такую, что: f_1 совпадает с f всюду вне некоторой малой окрестности точки p_1 , $f_1(p_1) > f(p_1)$, f_1 имеет те же критические точки и то же градиентно-подобное векторное поле, что и f . Выберем t_0 так, чтобы $f_1(p_1) > t_0 > f(p)$, и положим $V_0 = f_1^{-1}(t_0)$.

Левосторонняя $(\lambda - 1)$ -мерная сфера S_L точки p_1 в V_0 и правосторонние $(n - \lambda - 1)$ -мерные сферы $S_R(p_i)$ точек p_i , $2 \leq i \leq k$, лежащие в V_0 , не пересекаются. Выберем точки $a \in S_L$, $b \in S_R(p_2)$. Ввиду того что W (а значит, и V_0) связно, существует вложение $\varphi_1: (0, 3) \rightarrow V_0$, так что $\varphi_1(0, 3)$ пересекается с каждой из сфер S_L и $S_R(p_2)$ лишь в одной точке и при этом трансверсально, а именно, в точках $\varphi_1(1) = a$ и $\varphi_2(2) = b$, так что

$$\varphi_1(0, 3) \cap (S_R(p_3) \cup \dots \cup S_R(p_k)) = \emptyset.$$

Лемма 7.7. *Существует такое вложение $\varphi: (0, 3) \times R^{\lambda-1} \times R^{n-\lambda-1} \rightarrow V_0$, что:*

- 1) $\varphi(s, 0, 0) = \varphi_1(s)$ для всех $s \in (0, 3)$;
- 2) $\varphi^{-1}(S_L) = 1 \times R^{\lambda-1} \times 0$, $\varphi^{-1}(S_R(p_2)) = 2 \times 0 \times R^{n-\lambda-1}$;

3) образ φ не пересекается с другими сферами; более того, φ можно выбрать так, чтобы оно отображало $1 \times R^{\lambda-1} \times 0$ в S_L с сохранением ориентации и чтобы индекс пересечения $\varphi((0, 3) \times R^{\lambda-1} \times 0)$ с $S_R(p_2)$ в точке $\varphi(2, 0, 0) = b$ был равен $+1$.

Доказательство. Введем на V_0 такую риманову метрику, чтобы дуга $A = \varphi_1(0, 3)$ была ортогональной S_L и $S_R(p_2)$, а сами эти сферы были бы вполне геодезическими подмногообразиями V_0 (см. лемму 6.7).

Пусть $\mu(a)$ и $\mu(b)$ — два ортонормальных $(\lambda - 1)$ -мерных репера в точках a и b , причем $\mu(a)$ — касательный репер к S_L в точке a с положительной ориентацией, а $\mu(b)$ ортогонален к $S_R(p_2)$ в точке b с индексом пересечения $+1$. Расслоенное пространство над A ортонормальных $(\lambda - 1)$ -мерных реперов, ортогональных к A , тривиально, а его слоем является многообразие Штифеля $V_{\lambda-1}(R^{n-2})$, связное в силу неравенства $\lambda - 1 < n - 2$. Следовательно, мы можем продолжить μ до гладкого сечения над всем A .

Расслоенное пространство над A ортонормальных $(n - \lambda - 1)$ -мерных реперов, ортогональных к A и μ , является тривиальным со слоем $V_{n-\lambda-1}(R^{n-\lambda-1})$. Обозначим через η некоторое гладкое сечение.

Используем теперь экспоненциальное отображение, ассоциированное с введенной метрикой, и определим с помощью $(n - 2)$ -мерного репера $\mu\eta$ вложение φ , обладающее нужными свойствами. Детали этого построения аналогичны приведенным в заключительной части доказательства леммы 6.7, стр. 80. Это завершает доказательство леммы 7.7.

Окончание доказательства теоремы 7.6. Используя φ , мы построим изотопию многообразия V_0 , которая переводит S_L сквозь $S_R(p_2)$ описываемым далее образом (см. рис. 7.2).

Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим гладкую функцию $\alpha: R \rightarrow \left[1, 2\frac{1}{2}\right]$, такую, что $\alpha(u) = 1$ для $u \geq 2\delta$ и $\alpha(u) > 2$ для $u \leq \delta$.

Так же, как мы это делали на стр. 72 при доказательстве теоремы 6.6 предыдущего параграфа, построим изотопию H_t на $(0, 3) \times R^{\lambda-1} \times R^{n-\lambda-1}$, удовлетворяющую следующим условиям:

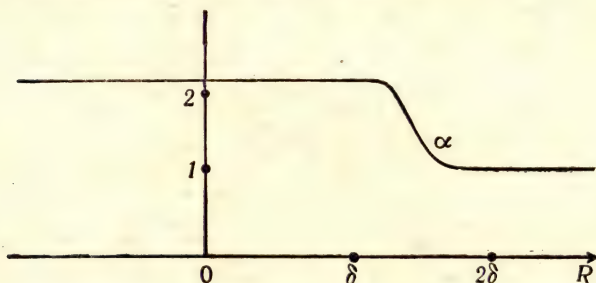


Рис. 7.1.

1) H_t тождественно вне некоторого компактного множества для всех t из отрезка $[0, 1]$;

2) $H_t(1, \vec{x}, 0) = (t \alpha(|\vec{x}|^2) + (1-t), \vec{x}, 0)$ для всех $\vec{x} \in R^{\lambda-1}$.

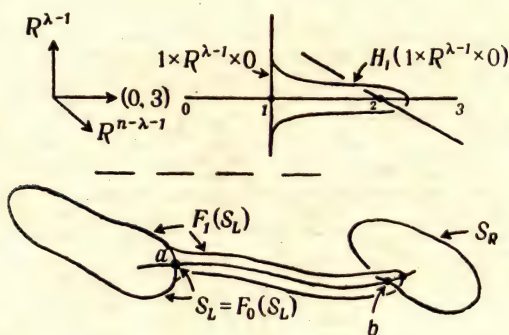


Рис. 7.2.

Определим изотопию F_t на V_0 , положив $F_t(v) = \varphi \circ H_t \circ \varphi^{-1}(v)$ для всех v , принадлежащих образу φ , и $F_t(v) = v$ для всех остальных v . Из свойства 1) изотопии H_t видно, что определение F_t корректно.

Используя теперь лемму 3.5, найдем тривиально расслоенную окрестность $V_0 \times [0, 1]$, вложенную в W по правую сторону от V_0 таким образом, чтобы она не содержала критических точек и $V_0 \times 0 = V_0$. Используя изотопию F_t и изменив векторное поле ξ на этой окрестности, как это сделано в лемме 4.6, получим новое векторное поле ξ' на W .

Поскольку ξ и ξ' совпадают слева от V_0 (точнее, на $f_1^{-1}(-\infty, t_0]$), правосторонними сферами в V_0 , ассоциированными с ξ' , по-прежнему будут сферы $S_R(p_2), \dots, S_R(p_k)$. Левосторонняя сфера точки p_1 , ассоциированная с ξ' , есть $S'_L = F_0(S_L)$. Из свойства 2) изотопии H_0 нам известно, что S'_L не пересекается с $S_R(p_3), \dots, S_R(p_k)$. Следовательно, мы можем, согласно 4.2, найти функцию Морса f' , совпадающую в некоторой окрестности dW с f_1 (и, таким образом, с f), имеющую ξ' своим градиентно-подобным векторным полем и обладающую лишь одним критическим значением.

На этом построение f' и ξ' закончено. Остается проверить, что новые левосторонние диски действительно образуют требуемый базис.

Левосторонними дисками в точках p_1, \dots, p_k , ассоциированными с ξ' , по-прежнему будут диски $D_L(p_2), \dots, D_L(p_k)$, так как $\xi' = \xi$ слева от окрестности $V_0 \times [0, 1]$, т. е. на $f_1^{-1}(-\infty, t_0]$. Так как $\xi' = \xi$ также и справа от $V_0 \times [0, 1]$, то новый левосторонний диск $D'_L(p_1)$ пересекается с $D_R(p_1)$ в точке $p_1 = D'_L(p_1) \cap D_R(p_1)$, так что индекс пересечения равен $D_R(p_1) \cdot D'_L(p_1) = +1$. Из свойства 2) изотопии H_t следует, что $D'_L(p_1)$ и $D_R(p_2)$ пересекаются в единственной точке трансверсально с индексом пересечения $D_R(p_2) \cdot D'_L(p_1) = +1$. Наконец, из свойства 3) вложения ϕ следует, что $D'_L(p_1)$ не пересекается с $D_R(p_3), \dots, D_R(p_k)$ и, таким образом, $D_R(p_i) \cdot D'_L(p_1) = 0$ для всех $i = 3, \dots, k$. Итак, базис $H_\lambda(W, V)$, образованный левосторонними дисками,

ассоциированными с ξ' , действительно совпадает с $b_1 + b_2, b_2, \dots, b_k$. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 7.8. Пусть $(W; V, V')$ есть триада размерности $n \geq 6$, на которой определена функция Морса без критических точек с индексами 0, 1 или $n-1, n$. Предположим далее, что W, V и V' односвязны (и, следовательно, ориентируемы) и что $H_*(W, V) = 0$. Тогда $(W; V, V')$ является тривиальным кобордизмом.

Доказательство. Обозначим через c кобордизм $(W; V, V')$. Из теоремы 4.7 следует, что мы можем представить c в виде композиции $c = c_2 c_3 \dots c_{n-2}$ так, что на c будет определена функция Морса f , ограничение которой на каждый из кобордизмов c_λ является функцией Морса, все критические точки которой расположены на одном уровне и имеют одинаковый индекс λ . В обозначениях теоремы 7.4 имеем последовательность свободных абелевых групп

$$C_{n-2} \xrightarrow{\partial} C_{n-3} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_{\lambda+1} \xrightarrow{\partial} C_\lambda \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_2.$$

Для каждого λ выберем базис $z_1^{\lambda+1}, \dots, z_{k_{\lambda+1}}^{\lambda+1}$ ядра отображения $\partial: C_{\lambda+1} \rightarrow C_\lambda$. Поскольку $H_*(W, V) = 0$, из теоремы 7.4 следует, что указанная выше последовательность является точной и можно выбрать $b_1^{\lambda+1}, \dots, b_{k_\lambda}^{\lambda+1} \in C_{\lambda+1}$ таким образом, чтобы $b_i^{\lambda+1} \xrightarrow{\partial} z_i^\lambda$ для всех $i = 1, \dots, k_\lambda$. Тогда элементы $z_1^{\lambda+1}, \dots, z_{k_{\lambda+1}}^{\lambda+1}, b_1^{\lambda+1}, \dots, b_{k_\lambda}^{\lambda+1}$ образуют базис $C_{\lambda+1}$.

Так как $2 \leq \lambda \leq \lambda+1 \leq n-2$, то, используя теорему 7.6, построим на c такую функцию Морса f' и такое градиентно-подобное векторное поле ξ' , чтобы левосторонние диски на c_λ и $c_{\lambda+1}$ образовывали выделенные выше базисы C_λ и $C_{\lambda+1}$.

Пусть теперь p и q — критические точки на c_λ и $c_{\lambda+1}$, соответствующие z_1^λ и $b_1^{\lambda+1}$. Увеличив f' в окрестности p и уменьшив f' в окрестности q (см. 4.1, 4.2), мы получим равенство $c_\lambda c_{\lambda+1} = c'_\lambda c_p c_q c'_{\lambda+1}$, где c_p имеет ровно одну критическую точку p , а c_q — ровно одну

критическую точку q . Обозначим через V_0 некоторое подмногообразие уровня между c_p и c_q . Легко проверить, что кобордизм $c_p c_q$ и оба граничных многообразия этого кобордизма односвязны (см. замечание 1, стр. 68). Так как $\partial b_1^{\lambda+1} = z_1^\lambda$, то индекс пересечения сфер $S_R(p)$ и $S_L(q)$ в V_0 равен ± 1 . Следовательно, из второй теоремы о взаимном уничтожении критических точек 6.4 или следствия 6.5 вытекает, что $c_p c_q$ является тривиальным кобордизмом и функция f' , а также ее градиентно-подобное векторное поле могут быть изменены внутри $c_p c_q$ таким образом, чтобы f' не имела там критических точек. Повторив этот процесс столько раз, сколько это возможно, мы, очевидно, исключим все критические точки. На этом в силу теоремы 3.4 доказательство теоремы 7.8 закончено.

§ 8. ИСКЛЮЧЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК С ИНДЕКСАМИ 0 И 1

Рассмотрим гладкую триаду $(W^n; V, V')$. Мы будем далее предполагать, что на ней определена функция Морса f с «внутренней индексацией» (см. определение 4.8) и ассоциированным градиентно-подобным векторным полем ξ . Пусть $W_k = f^{-1}[-1/2, k+1/2]$, $k=0, 1, \dots, n$, и $V_{k+} = f^{-1}(k+1/2)$.

Теорема 8.1. Индекс 0. Если $H_0(W, V) = 0$, то критические точки индекса 0 могут быть попарно взаимно уничтожены с тем же числом критических точек индекса 1.

Индекс 1. Предположим, что многообразия W и V односвязны и $n \geq 5$. Если критических точек индекса 0 не существует, то для каждой точки индекса 1 можно ввести две дополнительные критические точки индекса 2 и 3 таким образом, чтобы эта точка индекса 1 и соответствующая ей вспомогательная точка индекса 2 взаимно уничтожались. (Таким образом, каждая критическая точка индекса 1 «заменяется» критической точкой индекса 3.)

З а м е ч а н и е. Метод, использованный нами в теореме 7.8 для исключения критических точек индекса $2 \leq \lambda \leq n-2$, не проходит для индекса 1 по следующей причине. Вторая теорема о взаимном уничтожении критических точек 6.4 справедлива при $\lambda=1$, $n \geq 6$ (см. стр. 68), но нам пришлось бы применить ее в ситуации, когда предположение об односвязности в теореме 6.4 нарушено в силу существования нескольких критических точек индекса 1.

Доказательство теоремы в случае индекса 0. Если бы нам всегда удавалось находить на V_{0+} сферы S_R^{n-1} и S_L^0 , пересекающиеся в одной точке, то доказательство следовало бы из 4.2, 5.4 (первая теорема о взаимном уничтожении критических точек) после применения индукции, проводившейся за конечное число шагов — см. доказательство для индекса 1 ниже. Рассмотрим гомологии с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Поскольку $H_0(W, V; \mathbf{Z}_2) = 0$, отображение $H_1(W_1, W_0; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_0(W_0, V; \mathbf{Z}_2)$ является по теореме 7.4 эпиморфизмом. Но ∂ задается, очевидно, матрицей индексов пересечения по модулю 2 правосторонних $(n-1)$ -мерных сфер с левосторонними 0-мерными сферами в V_{0+} . Следовательно, для каждой сферы S_R^{n-1} найдется по крайней мере одна сфера S_L^0 , для которой $S_R^{n-1} \cdot S_L^0 \not\equiv 0 \pmod{2}$. Это означает, что $S_R^{n-1} \cap S_L^0$ состоит из нечетного числа точек, которое может быть равным только 1. Этим завершается доказательство теоремы в случае индекса 0.

Для построения дополнительных критических точек нам потребуется

Лемма 8.2. Для заданного λ , $0 \leq \lambda < n$, найдется гладкое отображение $f: R^n \rightarrow R$, удовлетворяющее вне некоторого компактного множества равенству $f(x_1, \dots, x_n) = x_1$ и такое, что f имеет ровно две невырожденные критические точки p_1 и p_2 индекса λ и $\lambda+1$ соответственно, причем $f(p_1) < f(p_2)$.

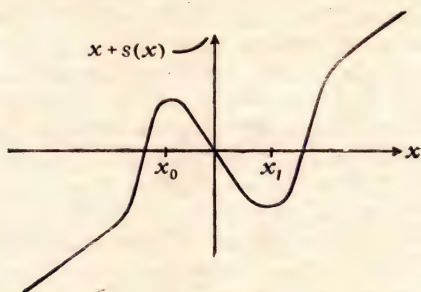
Доказательство. отождествим R^n с $R \times R^\lambda \times R^{n-\lambda-1}$ и обозначим общую точку через (x, y, z) . Пусть y^2 означает квадрат длины вектора $y \in R^\lambda$.

Выберем функцию $s(x)$ с компактным носителем так, чтобы функция $x+s(x)$ имела две невырожденные критические точки, скажем x_0 и x_1 .

Рассмотрим сначала функцию $x+s(x) - y^2 + z^2$ на R^n . Она имеет две невырожденные критические точки $(x_0, 0, 0)$ и $(x_1, 0, 0)$ нужных индексов.

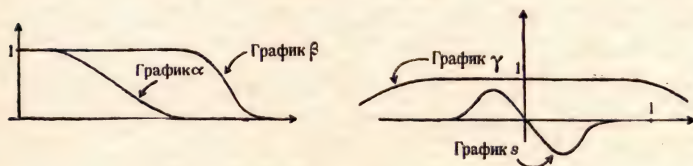
«Сузим» теперь эту функцию. А именно, выберем три гладкие функции $\alpha, \beta, \gamma: R \rightarrow R_+$ с компактными носителями так, чтобы

- 1) $\alpha(t) = 1$ при $|t| \leq 1$;
- 2) $|\alpha'(t)| < 1/\max |s(x)|$ для всех t (штрих означает производную);



Р и с. 8.1.

- 3) $\beta(t) = 1$, если $\alpha(t) \neq 0$;
- 4) $\gamma(x) = 1$, если $s'(x) \neq 0$;
- 5) $|\gamma'(x)| < 1/\max (t\beta(t))$.



Р и с. 8.2.

Пусть теперь

$$f = x + s(x) \alpha(y^2 + z^2) + \gamma(x) (-y^2 + z^2) \beta(y^2 + z^2).$$

Заметим, что:

- а) функция $f - x$ имеет компактный носитель;
- б) в области, где $\alpha = 1$ (следовательно, $\beta = 1$) и $\gamma = 1$, f совпадает со старой функцией f и имеет те же критические точки;

$$с) \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + s'(x) \alpha(y^2 + z^2) + \gamma'(x) (-y^2 + z^2) \beta(y^2 + z^2).$$

Третий член в силу 5) по абсолютной величине меньше 1. Следовательно, если $s'(x) = 0$ или $\alpha(y^2 + z^2) = 0$,

то $\partial f / \partial x \neq 0$. Таким образом, для обнаружения каких-либо еще критических точек нам нужно обследовать лишь область, в которой $s'(x) \neq 0$ (следовательно, $\gamma=1$) и $\alpha(y^2+z^2) \neq 0$ (следовательно, $\beta=1$);

d) в области $\gamma=1$, $\beta=1$ имеем $\text{grad } f = (1 + s'(x)\alpha(y^2+z^2), 2y(s(x)\alpha'(y^2+z^2) - 1), 2z(s(x) \cdot \alpha'(y^2+z^2) + 1))$. Но ввиду 2), $s(x)\alpha'(y^2+z^2) \pm 1 \neq 0$. Следовательно, градиент может обращаться в нуль лишь в случае, когда $y=0$, $z=0$, а, значит, $\alpha=1$. Но этот случай уже описан в б).

Доказательство теоремы 8.1 в случае индекса 1. Данная ситуация может быть описана с помощью схемы

$$\begin{array}{cccc} V & V_{1+} & V_{2+} & \text{и т. д.} \\ \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right) & \vdots \\ \text{Индекс} & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Первый шаг доказательства состоит в построении для каждой правосторонней $(n-2)$ -мерной сферы в V_{1+} , соответствующей критической точке p , подходящей одномерной левосторонней сферы критической точки индекса 2, которая будет затем взаимно уничтожена с p .

Лемма 8.3. Если S_R^{n-2} — правосторонняя сфера в V_{1+} , то существует одномерная сфера, вложенная в V_{1+} , которая трансверсально пересекается с S_R^{n-2} в единственной точке и не пересекается ни с какой другой правосторонней сферой.

Доказательство. В любом случае найдется малый вложенный в V_{1+} одномерный диск D , который трансверсально пересекается с S_R^{n-2} в некоторой внутренней для D точке q_0 и который не имеет других пересечений с правосторонними сферами. Переведем концевые точки D влево вдоль траектории поля ξ вплоть до попадания на V . Ввиду связности V и

неравенства $\dim V = n - 1 \geq 2$ эти точки могут быть соединены гладким путем в V , не имеющим общих точек с левосторонними нульмерными сферами в V . Этот путь может быть переведен обратно в некоторый гладкий путь, соединяющий концевые точки D в V_{1+} и не пересекающийся со всеми правосторонними сферами. Теперь легко может быть построено гладкое отображение $g: S^1 \rightarrow V_{1+}$, удовлетворяющее следующим требованиям:

а) точка $a = g^{-1}(q_0)$ принадлежит S^1 и g осуществляет гладкое вложение ее замкнутой окрестности A на некоторую окрестность точки q_0 в D ;

б) $g(S^1 - a)$ не пересекается с правосторонними $(n - 2)$ -мерными сферами. Поскольку $\dim V = n - 1 \geq 3$, теорема Уитни 6.12 гарантирует существование гладкого отображения, обладающего этими свойствами. Доказательство леммы закончено.

Нам понадобится следующая теорема, вытекающая из теорем 6.11, 6.12.

Теорема 8.4. *Если два гладких вложения гладкого многообразия M^m в гладкое многообразие N^n гомотопны, то они гладко изотопны при условии, что $n \geq 2m + 3$.*

З а м е ч а н и е. В действительности теорема верна и при условии $n \geq 2m + 2$ (см. Уитни [30]).

Продолжение доказательства теоремы 8.1 в случае индекса 1. Заметим, что V_{2+} всегда односвязно. В самом деле, включение $V_{2+} \subset W$ представимо в виде суперпозиции включений, каждое из которых принадлежит одному из двух типов: приклеивание клетки или гомотопическая эквивалентность (см. теорему 3.14). Приклеиваемые клетки имеют размерности $n - 2$ и $n - 1$ и располагаются слева или размерности 3, 4, ... и располагаются справа. Таким образом, V_{2+} односвязно, так как W односвязно и $\pi_1(V_{2+}) = \pi_1(W) = 1$ (см. замечание 1 на стр. 68). Если задана какая-то критическая точка p индекса 1, то мы строим некоторую «идеальную» од-

номерную сферу S в V_{1+} , как это сделано в лемме 8.3. После изменения ξ справа от V_{2+} , если это необходимо, мы можем считать, что S не пересекается с левосторонними одномерными сферами в V_{1+} (см. 4.5, 4.6). Тогда мы можем перевести S в одномерную сферу $S_1 \subset V_{2+}$.

В кольцевой окрестности, простирающейся вправо от V_{2+} , можно построить такие координатные функции x_1, \dots, x_n , осуществляющие вложение открытого множества U в R^n , что $f|_U = x_n$ (см. доказательство

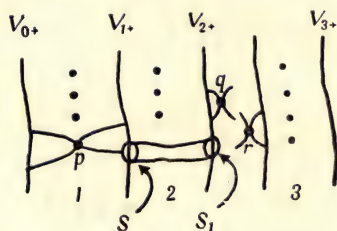


Рис. 8.3.

леммы 2.9). Используя лемму 8.2, изменим f на компактном подмножестве U таким образом, чтобы на нем появилась пара q, r , $f(q) < f(r)$, «вспомогательных» критических точек индекса 2 и 3 соответственно (см. рис. 8.3).

Пусть S_2 — левосторонняя одномерная сфера точки q в V_{2+} . Ввиду односвязности V_{2+} из теорем 8.4 и 5.8 следует существование отображения $V_{2+} \rightarrow V_{2+}$, изотопного тождественному и переводящего S_2 в S_1 . Таким образом, после изменения ξ справа от V_{2+} (см. лемму 4.6) S_1 будет левосторонней сферой точки q в V_{2+} . Тогда левосторонней сферой точки q в V_{1+} будет сфера S , которая по построению имеет трансверсальное пересечение в единственной точке с правосторонней сферой точки p .

Следуя теореме 4.2, изменим f , не изменяя ξ , внутри областей $f^{-1}[\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}]$ и $f^{-1}[1\frac{1}{2}, k]$, $k = (f(q) + f(r))/2$, так, чтобы для некоторого $\delta > 0$ уровень p

повысился, а уровень q понизился до значений, удовлетворяющих неравенствам

$$1 + \delta < f(p) < 1 \frac{1}{2} < f(q) < 2 - \delta.$$

Используя теперь первую теорему о взаимном уничтожении критических точек, изменим на $f^{-1}[1 + \delta, 2 - \delta]$ функцию f и поле ξ так, чтобы исключить критические точки p и q . Наконец, сдвинем критический уровень r вправо до 3 (согласно теореме 4.2).

Итак, мы «заменяли» точку p на r , после чего процесс можно повторять до тех пор, пока не останется ни одной критической точки с индексом 1. На этом доказательство теоремы 8.1 закончено.

§ 9. ТЕОРЕМА ОБ h -КОБОРДИЗМЕ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Вот теорема, доказательство которой было основной целью наших усилий.

Теорема 9.1. (Теорема об h -кобордизме.) Пусть триада $(W^n; V, V')$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) W, V и V' односвязны;
- 2) $H_*(W, V) = 0$;
- 3) $\dim W = n \geq 6$.

Тогда W диффеоморфно $V_0 \times [0, 1]$.

Замечание. Условие 2) эквивалентно условию 2)' $H_*(W, V') = 0$. Действительно, из $H_*(W, V) = 0$ в силу теоремы двойственности Пуанкаре вытекает, что $H^*(W, V') = 0$. Но $H^*(W, V') = 0$ влечет за собой $H_*(W, V') = 0$. Аналогично и 2) следует из 2)'.

Доказательство. Построим различающую функцию Морса триады $(W; V, V')$. Теорема 8.1 обеспечивает исключение критических точек с индексами 0 и 1. Заменяя функцию Морса f на $-f$, мы получим «перевернутую» триаду, при этом критические точки индекса λ перейдут в критические точки индекса $n - \lambda$. Таким образом, критические точки с (первоначальными) индексами n и $n - 1$ также могут быть исключены. Желаемое утверждение следует теперь из теоремы 7.8.

Определение 9.2. Триада $(W; V, V')$ называется h -кобордизмом, а многообразие V называется h -кобордантным многообразием V' , если V и V' оба являются деформационными ретрактами W .

З а м е ч а н и е. Заслуживает быть отмеченным тот (не используемый нами) факт, что замена условия 2, казалось бы, более сильным требованием, состоящим в том, чтобы триада $(W; V, V')$ была h -кобордизмом, дает лишь эквивалентный вариант теоремы 9.1. В самом деле, из условий 1) и 2) следует, что $(W; V, V')$ есть h -кобордизм. Действительно, из справедливости равенств

i) $\pi_1(V)=0$, $\pi_1(W, V)=0$, $H_*(W, V)=0$ следует, что

ii) $\pi_i(W, V)=0$, $i=0, 1, 2, \dots$, в силу (относительной) теоремы Гуревича об изоморфизме (Ху [39]; Хилтон [38, стр. 103]). Ввиду того, что (W, V) есть триангулируемая пара (Манкрес [8]), из ii) следует возможность построения сильной деформационной ретракции $W \rightarrow V$ (см. Хилтон [38, стр. 98, теорема 1.7]). Так как 2) влечет $H_*(W, V')=0$, то V' в силу тех же рассуждений есть (сильный) деформационный ретракт W .

Важным следствием теоремы 9.1 является

Теорема 9.2. *Два односвязных гладких h -кобордантных многообразия размерности ≥ 5 диффеоморфны.*

Некоторые применения (см. также Смейл [23], [26]).

Предложение А. *Описание гладких n -мерных дисков D^n , $n \geq 6$. Предположим, что W^n — гладкое компактное односвязное n -мерное многообразие, $n \geq 6$, с односвязной границей. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:*

- 1) W^n диффеоморфно D^n ;
- 2) W^n гомеоморфно D^n ;
- 3) W^n стягиваемо;
- 4) W^n имеет те же (целые) гомологии, что и точка.

Доказательство. Очевидно, что $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4)$. Поэтому мы докажем, что $4) \Rightarrow 1)$. Если D_0 — гладкий n -мерный диск, вложенный в $\text{Int } W$, то триада $(W - \text{Int } D_0, dD_0, dW)$ удовлетворяет условиям теоремы об h -кобордизме. В частности (выре-

занием), мы получим, что $H_*(W - \text{Int } D_0; dD_0) \cong \cong H_*(W, D_0) = 0$.

Следовательно, кобордизм $(W^n; \emptyset, dW)$ есть композиция кобордизма $(D_0; \emptyset, dD_0)$ и тривиального кобордизма $(W - \text{Int } D_0; dD_0, dW)$. Из теоремы 1.4 теперь получаем, что W диффеоморфно D_0 .

Предложение В. (Обобщенная гипотеза Пуанкаре для размерностей ≥ 5 (см. Смейл [23]).) Если M^n , $n \geq 5$, есть односвязное, замкнутое, гладкое многообразие, (целые) гомологии которого совпадают с гомологиями n -мерной сферы S^n , то M^n гомеоморфно S^n . Если $n = 5, 6$, то M^n диффеоморфно также и S^n .

Следствие. Если замкнутое гладкое многообразие M^n , $n \geq 5$, является гомотопической n -мерной сферой (т. е. имеет гомотопический тип S^n), то M^n гомеоморфно S^n .

Замечание. Существуют гладкие семимерные многообразия M^7 , гомеоморфные, но не диффеоморфные S^7 . (См. Милнор [9].)

Доказательство предложения В. Предположим сначала, что $n \geq 6$. Если $D_0 \subset M$ есть гладкий n -мерный диск, то $M - \text{Int } D_0$ удовлетворяет условиям предложения А. В частности,

$$H_i(M - \text{Int } D_0) \cong H^{n-i}(M - \text{Int } D_0, dD_0) \quad (\text{двойственность Пуанкаре, теорема 7.5})$$

$$\cong H^{n-1}(M, D_0) \quad (\text{вырезание})$$

$$\cong \begin{cases} 0, & \text{если } i > 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{если } i = 0 \end{cases} \quad (\text{точная последовательность}).$$

Следовательно, $M = (M - \text{Int } D_0) \cup D_0$ диффеоморфно объединению двух экземпляров D_1^n, D_2^n n -мерного диска с границами, отождествленными посредством некоторого диффеоморфизма $h: dD_1^n \rightarrow dD_2^n$.

Замечание. Такое многообразие называется *скрученной сферой*. Очевидно, что скрученная сфера

является замкнутым многообразием с числом Морса 2; верно и обратное.

Доказательство будет завершено после проверки того, что любая скрученная сфера $M = D_1^n \cup_h D_2^n$ гомеоморфна S^n . Пусть вложение $g_1: D_1^n \rightarrow S^n$ является отображением на южную полусферу сферы $S^n \subset R^{n+1}$, т. е. на множество

$$\{\vec{x} \in R^{n+1} \mid |\vec{x}| = 1, x_{n+1} \leq 0\}.$$

Любая точка D_2^n может быть записана в виде tv , $0 \leq t \leq 1$, $v \in dD_2^n$. Определим $g: M \rightarrow S^n$, положив:

$$\text{i) } g(u) = g_1(u), \text{ если } u \in D_1^n,$$

$$\text{ii) } g(tv) = \sin \frac{\pi t}{2} g_1(h^{-1}(v)) + \cos \frac{\pi t}{2} e_{n+1}, \text{ где } e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in R^{n+1}, \text{ для всех точек } tv \text{ из } D_2^n.$$

Тогда g осуществляет взаимно однозначное непрерывное отображение на S^n и, следовательно, является гомеоморфизмом. Тем самым для $n \geq 6$ доказательство закончено. Для $n=5$ мы используем следующий результат.

Теорема 9.3. (Кервер и Милнор [13]. Уолл [32].) *Предположим, что M^n есть замкнутое односвязное гладкое многообразие, группы гомологий которого изоморфны группам гомологий n -мерной сферы S^n . Тогда, если $n=4, 5$ или 6 , M^n является границей гладкого, компактного, стягиваемого многообразия.*

Теперь из предложения А следует, что при $n=5$ или 6 M^n действительно диффеоморфно S^n .

Предложение С. (Описание пятимерных дисков.) *Предположим, что W^5 есть компактное односвязное гладкое многообразие, (целые) гомологии которого совпадают с гомологиями точки. Пусть $V=dW$.*

1) *Если V диффеоморфно S^4 , то W диффеоморфно D^5 .*

2) *Если V гомеоморфно S^4 , то W гомеоморфно D^5 .*

Доказательство утверждения 1). Образует гладкое пятимерное многообразие $M = W \cup_h D^5$, где h есть диффеоморфизм $V \rightarrow dD^5 = S^4$. Тогда M является односвязным многообразием с гомологиями сферы. В предложении В нами доказано, что M диффеоморфно S^5 . Нам понадобится теперь

Теорема 9.4 (Пале [18], Серф [20], Милнор [12]). *Два любых гладких сохраняющих ориентацию вложения n -мерного диска в связное ориентируемое n -мерное многообразие являются изотопными в силу некоторой накрывающей изотопии.*

Таким образом, существует диффеоморфизм $g: M \rightarrow M$, отображающий $D^5 \subset M$ на диск D_1^5 , так что $D_2^5 = M - \text{Int } D_1^5$ также является диском. Тогда g диффеоморфно отображает $W \subset M$ на D_2^5 .

Доказательство утверждения 2) предложения С. Рассмотрим дубль $D(W)$ многообразия W (т. е. два экземпляра W с отождествленными границами — см. Манкрес [8]). Подмногообразие $V \subset D(W)$ обладает в $D(W)$ бикольцевой окрестностью, а в силу предложения В, $D(W)$ гомеоморфно S^5 . Следующий результат принадлежит Брауну [2].

Теорема 9.5. *Если $(n-1)$ -мерная сфера Σ , топологически вложенная в S^n , обладает там бикольцевой окрестностью, то существует гомеоморфизм $h: S^n \rightarrow S^n$, отображающий Σ на $S^{n-1} \subset S^n$. Таким образом, $S^n - \Sigma$ состоит из двух компонент, замыкание каждой из которых есть n -мерный диск с границей Σ .*

Отсюда следует, что W гомеоморфно D^5 . Этим завершается доказательство предложения С.

Предложение D. (Дифференцируемый вариант теоремы Шёнфлиса в размерностях $n \geq 5$.) *Предположим, что Σ есть гладкий образ $(n-1)$ -мерной сферы при вложении ее в S^n . Если $n \geq 5$, то существует гладкая накрывающая изотопия, переводящая Σ в экватор $S^{n-1} \subset S^n$.*

Доказательство. $S^n - \Sigma$ состоит из двух компонент (согласно двойственности Александера),

откуда в силу 3.6 Σ имеет в S^n бикольцевую окрестность. Замыкание одной из компонент $S^n - \Sigma$ в S^n является гладким односвязным многообразием D_0 с краем Σ и (целыми) гомологиями точки. При $n \geq 5$ D_0 в силу предложений А и С диффеоморфно D^n . Применим теорему Пале и Серфа 9.4, из которой вытекает существование накрывающей изотопии, переводящей D_0 в нижнюю полусферу, а, значит, $dD_0 = \Sigma$ — в экватор.

З а м е ч а н и е. Из предыдущего видно, что если $f: S^{n-1} \rightarrow S^n$ есть гладкое вложение, то f гладко изотопно отображению на $S^{n-1} \subset S^n$; но вообще неверно, что f гладко изотопно включению $i: S^{n-1} \rightarrow S^n$. Это не так в случае $f = i \circ g$, когда диффеоморфизм $g: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ не продолжается до диффеоморфизма $D^n \rightarrow D^n$. (Читатель без труда проверит, что g продолжается на D^n тогда и только тогда, когда скрученная сфера $D_1^n \cup_g D_2^n$ диффеоморфна S^n .) В самом деле, если f гладко изотопно i , то по теореме о продолжении изотопии 5.8 существует диффеоморфизм $d: S^n \rightarrow S^n$, такой, что $d \circ i = f = i \circ g$. Это обеспечивает два различных продолжения g до диффеоморфизма $D^n \rightarrow D^n$.

З а к л ю ч и т е л ь н ы е з а м е ч а н и я. Остается открытым вопрос о том, справедлива ли теорема об h -кобордизме для размерностей $n < 6$. Пусть $(W^n; V, V')$ есть h -кобордизм, причем W^n односвязно и $n < 6$.

$n=0, 1, 2$. Теорема тривиальна (или бессодержательна).

$n=3$. V и V' должны быть двумерными сферами. Тогда теорема сразу же следует из классической гипотезы Пуанкаре:

Всякое гладкое трехмерное многообразие, гомотопически эквивалентное S^3 , диффеоморфно S^3 .

Так как любая скрученная трехмерная сфера (см. стр. 105) диффеоморфна S^3 (см. Смейл [24], Манкрес [7]), то теорема действительно эквивалентна этой гипотезе.

$n=4$. Если классическая гипотеза Пуанкаре верна, то V и V' должны быть трехмерными сферами.

Нетрудно видеть, что тогда теорема эквивалентна следующей «гипотезе о четырехмерном диске»:

Всякое гладкое стягиваемое четырехмерное многообразие с границей S^3 диффеоморфно D^4 .

Но из одной трудной теоремы Серфа [21] следует, что всякая скрученная четырехмерная сфера диффеоморфна S^4 . Отсюда ясно, что наша гипотеза эквивалентна следующей:

Всякое компактное гладкое четырехмерное многообразие, гомотопически эквивалентное S^4 , диффеоморфно S^4 .

$n=5$. Из предложения С следует, что теорема остается верной, когда V и V' диффеоморфны S^4 . Однако существует много типов замкнутых односвязных четырехмерных многообразий. Барден показал (работа не опубликована), что если существует диффеоморфизм $f: V' \rightarrow V$, гомотопный $r|_{V'}$, где $r: W \rightarrow V$ есть деформационная ретракция, то W диффеоморфно $V \times [0, 1]$. (См. Уолл [35], а также [34].)

ЛИТЕРАТУРА

Барден (Barden D.)

- [1] Structure of manifolds, Thesis, Cambridge University, 1963.

Браун (Brown M.)

- [2] A proof of the generalized Schoenflies theorem, *Bull. AMS*, **66** (1960), 74—76. (Русский перевод: Доказательство обобщенной теоремы Шoenфлиса, сб. *Математика*, 5:5 (1961).)

Кервер, Милнор (Kervaire M., Milnor J.)

- [3] Groups of homotopy spheres, *Ann. of Math.*, **77**, № 3 (1963), 504—537.

Кроуэлл, Фокс (Crowell R., Fox R.)

- [4] Введение в теорию узлов, изд-во «Мир», М., 1967.

V Ленг (Lang S.)

- [5] Введение в теорию дифференцируемых многообразий, изд-во «Мир», М., 1967.

Мазур (Mazur B.)

- [6] Differential topology from the point of view of simple homotopy theory, *Publications Math., Inst. des Hautes Et. Scient.*, No. 15.

Манкрес (Munkres J.)

- [7] Differential isotopies on the 2-sphere, *Michigan Math. J.*, **7** (1960), 193—197.
[8] Elementary differential topology, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1963. (Готовится русский перевод.)

Милнор (Milnor J.)

- [9] On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. of Math.*, **64**, № 2 (1956), 399—405. (Русский перевод: О многообразиях, гомеоморфных семимерной сфере, сб. *Математика*, 1:3 (1957).)
[10] Characteristic classes, notes by J. Stasheff, mimeographed Princeton Univ., 1957. (Русский перевод: Лекции о характеристических классах, сб. *Математика*, 3:4 (1959); II, 9:4 (1965).)

- [11] Differential topology, notes by J. Munkres, mimeographed Princeton Univ., 1958.
- [12] Differential structures, lecture notes mimeographed, Princeton Univ., 1961.
- [13] Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 575—590.
- [14] The Sard-Brown theorem and elementary topology, mimeographed Princeton Univ., 1964.
- [15] Characteristic classes, Notes, Appendix A, mimeographed, Princeton Univ., March, 1964.
- ✓ [16] Теория Морса, изд-во «Мир», М., 1965.

Морс (Morse M.)

- [17] Differential and combinatorial topology, Proceedings of a symposium in honour of Marston Morse, Princeton Univ. Press (в печати).

Пале (Palais R.)

- [18] Extending diffeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **11** (1960), 274—277.

де Рам (de Rham G.)

- [19] Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.

Серф (Cerf J.)

- [20] Topologie de certains espaces de plongements, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1961), 227—380.
- [21] La nullité du groupe Γ_4 , *Sém. H. Cartan, Paris*, 1962—63, №№ 8, 9, 10, 20, 21.
- [22] Isotopy and pseudo-isotopy, I, mimeographed at Cambridge Univ., 1964.

Смейл (Smale S.)

- [23] Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than 4, *Ann. of Math.*, **64** (1956), 399—405. (Русский перевод: Обобщенная гипотеза Пуанкаре для размерностей, больших четырех, сб. *Математика*, **5:5** (1961).)
- [24] Diffeomorphisms of the 2-sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 621—626.
- [25] On gradient dynamical systems, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 199—206.
- [26] On the structure of manifolds, *Amer. J. of Math.*, **84** (1962), 387—399. (Русский перевод: О строении многообразий, сб. *Математика*, **8:4** (1964).)

Стинрод (Steenrod N.)

- [27] Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.

Стинрод, Эйленберг (Steenrod N., Eilenberg S.)

- [28] Основания алгебраической геометрии, ИЛ, М., 1958.

Том (Thom R.)

- [29] La classification des immersions, Séminaire Bourbaki, 1957.

Уитни (Whitney H.)

- [30] Differentiable manifolds, *Ann. of Math.*, 37 (1936), 645—680.
- [31] The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space, *Ann. of Math.*, 45 (1944), 220—246.

Уолл (Wall C. T. C.)

- [32] Killing the middle homotopy groups of odd dimensional manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103 (1962), 421—433.
- [33] Differential topology, part IV, Cambridge University mimeographed notes, 1962.
- [34] On simply-connected 4-manifolds, *J. London Math. Soc.*, 39 (1964), 141—149.
- [35] Topology of smooth manifolds, *J. London Math. Soc.*, 40 (1965), 1—20.

Уоллес (Wallace A.)

- [36] Modifications and cobounding manifolds, *Canadian J. Math.*, 12 (1960), 503—528.

Хебш, Морс (Huebsch W., Morse M.)

- [37] The bowl theorem and a model nondegenerate function, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 51 (1964), 49—51.

Хилтон (Hilton P.)

- [38] An introduction to homotopy theory, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, 43, Cambridge Univ. Press, 1961.

Ху С-цзян (Hu S.)

- [39] Теория гомотопий, изд-во «Мир», 1964.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Бесконечно дифференцируемое отображение 9
- Бикольцевая окрестность 28
- Вектор внешне нормальный 82
- Вторая теорема о взаимном уничтожении критических точек 67
- Гладкое n -мерное отображение 9
 - отображение 9
- Градиентно-подобное векторное поле 25, 89
- Граница многообразия 10
- Двойственность Пуанкаре 87
- Двойственный вариант теоремы о перегруппировке 45
- Двустороннее подмногообразие 23, 28
- Диск левосторонний 32
 - правосторонний 32
- Дифференцируемый вариант теоремы Шёнфлиса 107
- Заключительная теорема о перегруппировке 45
- Изотопия кобордизмов 12
- Индекс критической точки 14
 - пересечения многообразий 65
 - — — в точке 65
 - элементарного кобордизма 32
- Индукцированная образующая ориентации 82
 - ориентация 82
- Кобордизм 10
 - элементарный 32
- Координатная окрестность 9
- Край многообразия 10
- Критическая точка 14
 - — невырожденная 14
- Критическое значение 23
- Левосторонний диск 32
- Левосторонняя сфера 32
- Многообразие гладкое n -мерное 9
- Морса функция 7, 14
 - — с внутренней индексацией 45
 - число 15
- Невырожденная критическая точка 14
- Описание гладких n -мерных дисков 104
 - пятимерных дисков 106
- Отображение бесконечно дифференцируемое 9
 - гладкое 9
- Первая теорема о взаимном уничтожении критических точек 48
- Перегруппировка кобордизмов (rearrangement of cobordism) 39
- Перестройка (surgery) 32
- Подготовительная теорема о перегруппировке 39
- Правосторонний диск 32
- Правосторонняя сфера 32

- Псевдоизотопия кобордизмов 12
 Пуанкаре двойственность 87
 — обобщенная гипотеза 105
 Различающая функция 45
 Структура гладкая 9
 Сфера левосторонняя 32
 — правосторонняя 32
 — скрученная (twisted sphere) 105
 Теорема о бикольцевой окрестности 28
 — — взаимном уничтожении критических точек вторая 67
 — — — — — первая 48
 — — h -кобордизме 7, 103
 — — кольцевой окрестности 27
 — — перегруппировке заключительная 45
 — — — подготовительная 39
 — — продолжении изотопии 61
 Трансверсальное пересечение многообразий 46
 Триада гладких многообразий 10, 29, 87
 Тривиально расслоенная окрестность (product neighborhood) 42
 Тривиальный кобордизм (product cobordism) 26
 Функция с внутренней индексацией 45
 Характеристическое вложение 31
 Число Морса 15
 Эквивалентность кобордизмов 10
 C^2 -топология 19
 h -кобордизм 7, 103

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к русскому изданию	5
§ 0. Введение	7
§ 1. Категория кобордизмов	9
§ 2. Функции Морса	14
§ 3. Элементарные кобордизмы	25
§ 4. Перегруппировка кобордизмов	39
§ 5. Теорема о взаимном уничтожении критических точек	46
§ 6. Сильная теорема о взаимном уничтожении критических точек	65
§ 7. Взаимное уничтожение критических точек в средних размерностях	82
§ 8. Исключение критических точек с индексами 0 и 1	96
§ 9. Теорема об h -кобордизме и некоторые применения	103
Литература	110
Предметный указатель	113

ДЖ. МИЛНОР
Теорема об h -кобордизме

Редактор Д. Ф. Борисова
Художник А. Г. Антонова
Художественный редактор
В. И. Шаповалов

Технический редактор Н. Д. Толстякова
Корректор Л. Г. Чучукина

Сдано в производство 19/XII-68 г.
Подписано к печати 14/VII-69 г.
Бумага тип. № 3 Усл. печ. л. 6,09.
Уч.-изд. л. 4,6. Изд. № 1/4986,
Цена 41 коп. Зак. 1663.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва, 1-й Рижский пер., 2
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29.

41 коп.



